テキスト２

絵とともに学ぶ中学数学

平面図形とその応用

おとといのジョー　著

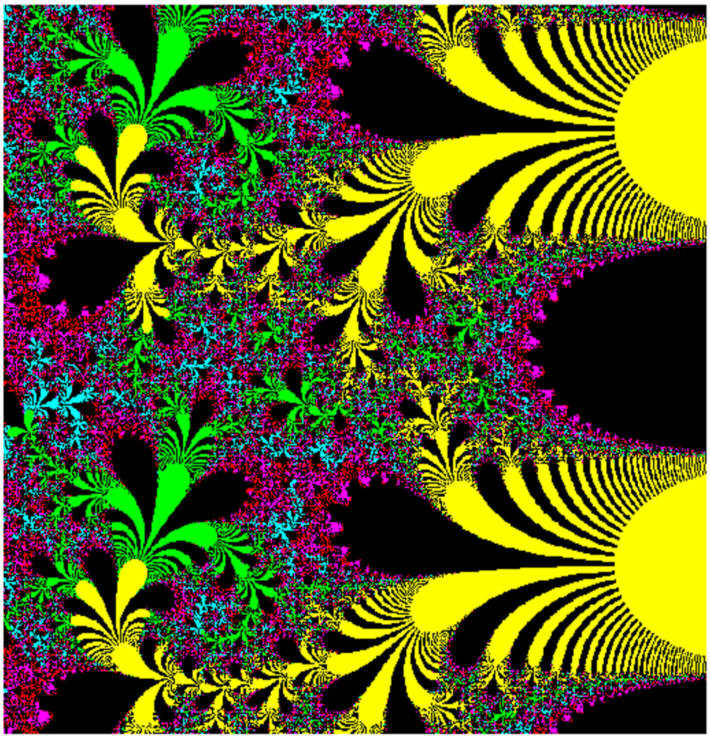
はじめに

図やグラフ (絵) を描きながら数学を学びましょう。きれいな絵がかけると，答えが簡単にわかることがありますよね。問題を解くための美しいきれいな絵を描いてみましょう。このテキストは，絵をふんだんにとりいれて書いてみました。読者の皆さんも，このテキストよりももっときれいな絵を描いて問題を解いて見て下さい。

数式でも，単純できれいな式に出会うことがありますよね。自分でみちびいた式がきれいな格好になった時などうれしくなりますよね。そんな数学の問題に出会えるといいですね。

数学の問題を解く道すじはたくさんあります。式の変形だけで解けるものもあるし，図形だけで解けることもあるし，両方必要になるときもあるでしょう。答えに至る道も１つではなく，いっぱいあります。そのうちの１つをあなた自身の考えで発見して下さい。

Let ’ s play mathematics !



複素数関数 $w = ce^z$ によるフラクタル図形

もくじ

第 1 章　多角形

§ 1.1　図形の移動

♠★ 図形の移動は，平行移動，回転移動，対称移動の 3 種類がよく使われる（図 1.1 参照)。

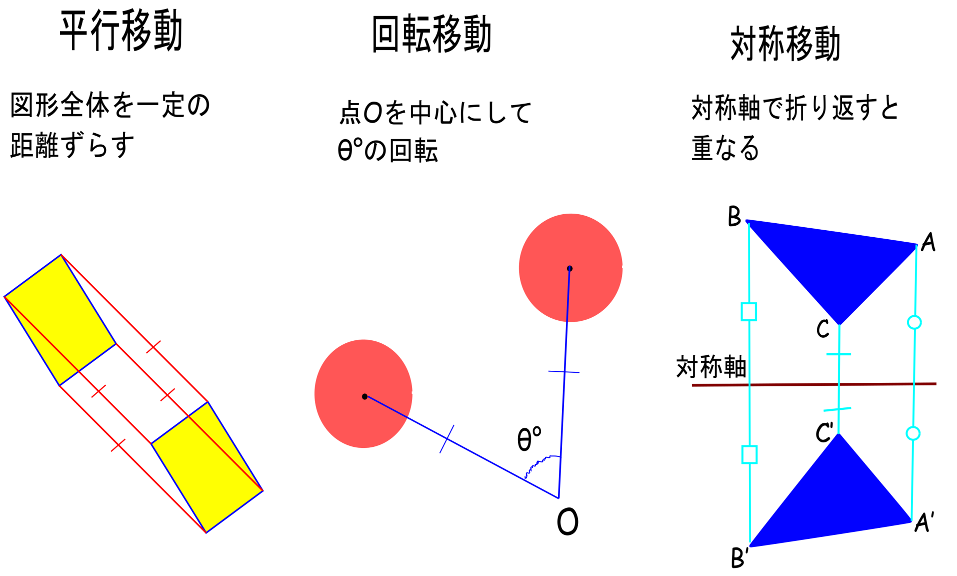


図1.1　図形の移動

(例)・ある直線を平行移動した直線は，もとの直線とは決して交わらない（平行線は交わらない)。

・点 P を中心にある図形を 360° 回転した図形は，もとの図形と重なる（360° は 1 回転)。

・2 次関数 $y = ax^2$ のグラフは y 軸対象である。

★ 線対称および点対称な図形は，図 1.2 で示される図形である。

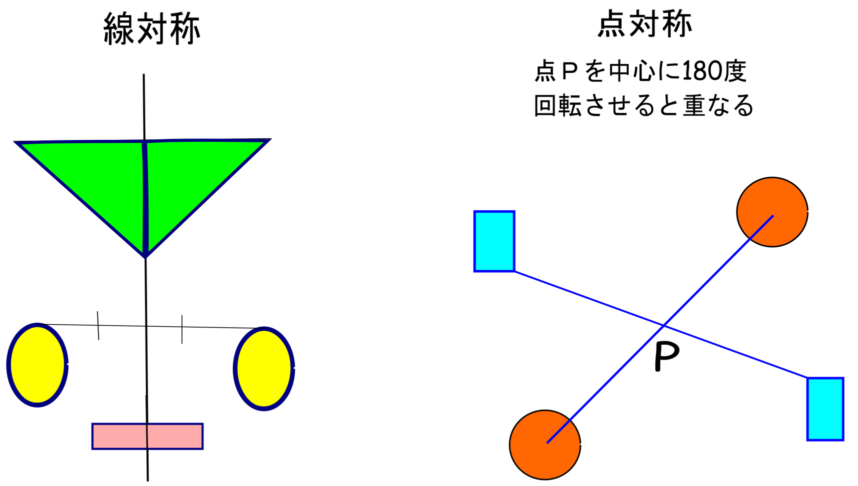


図1.2　対称とは

(例)・$y = ax^2$ と $y = -ax^2$ のグラフは，x 軸対称である。

・原点を通る直線（関数 $y = ax$ ）は，原点対称である。また，$y = \dfrac{a}{x}$ で表される双曲線は原点対称である。

★2 本以上の直線によって作られる角度には，呼び名がある。特に，2 本の平行線とそれらに交わる直線が作る角度はよい性質をもつ。このテキストでは，角度はギリシャ文字 α (アルファ)，β (ベータ)，γ (ガンマ)，δ (デルタ)，θ (シータ)，λ (ラムダ) などを使って表すこととする。
対頂角，同位角，錯角などの性質を，下の図で示す。

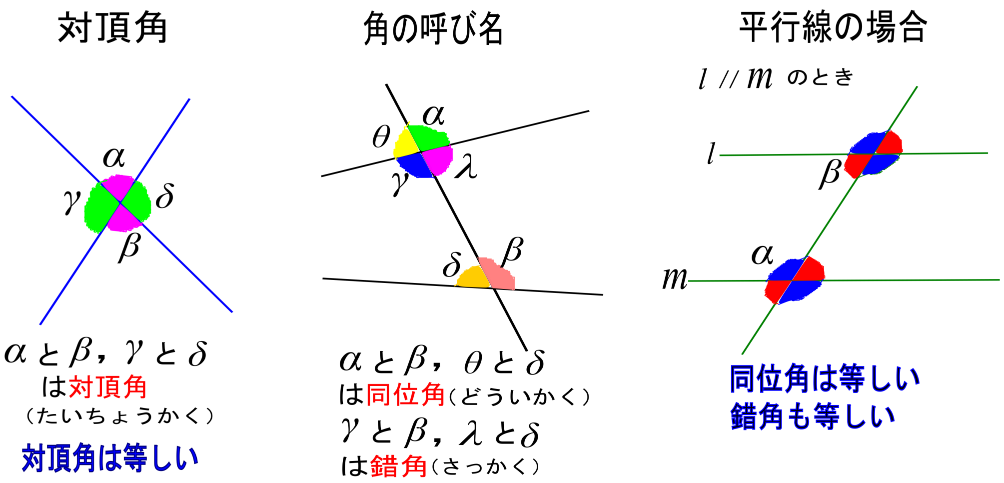


図1.3　角の性質

★2 直線に 1 つの直線が交わるとき，同位角が等しければ，2 直線は平行である。
同様に，錯角が等しければ，2 直線は平行である。（証明は考えてみよう）
（例）・交わっている 2 直線の 1 つの対頂角が 46° のとき，もう 1 つの対頂角は 134° である。
・正三角形の 1 つの内角は 60°，正方形の 1 つの内角は 90°，正五角形の 1 つの内角は 108° である。 ♠

§ 1.2　**三角形の性質**　三角形は平面図形の中で最も重要なものです。というのは，すべての多角形は三角形に分割されるからです。言いかえれば，多角形は三角形からできているのです。ここでは，三角形の基本的性質を学びましょう。三角形には下の図のように，形によっていろんな名前がつけられてます。

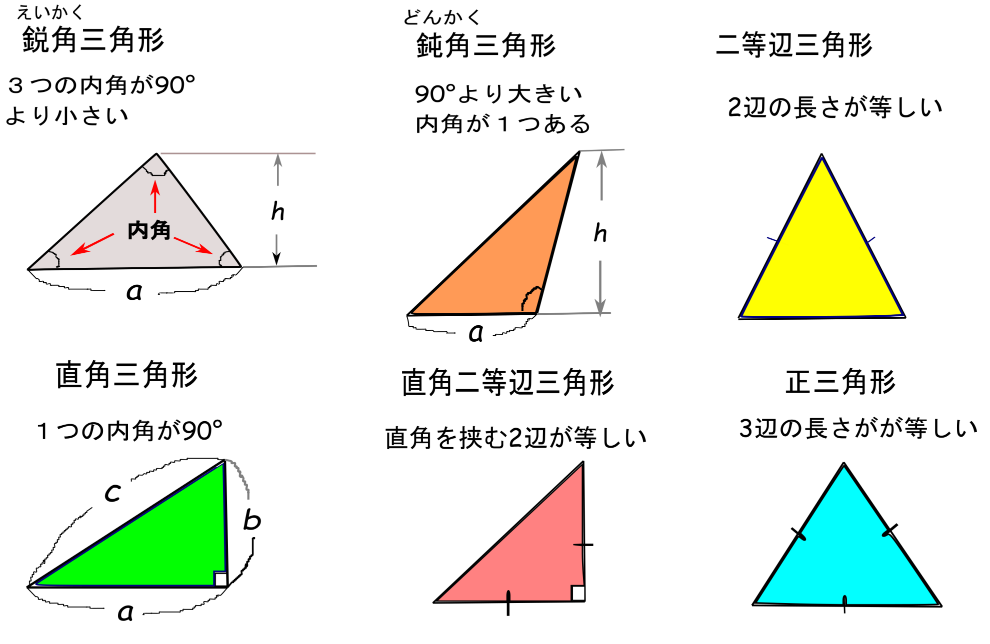


図1.4　いろいろな三角形

■ 底辺の長さが a，高さが h の三角形（上図最初の 2 つ参照）の面積 S は，覚えてるよね：

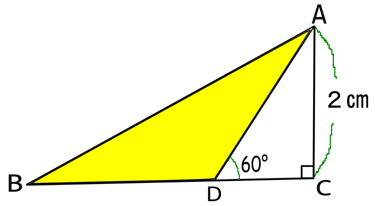
$$S=\frac{1}{2}ah. \quad [（底辺）\times（高さ）\div 2] \quad \cdots \quad ①$$

また，テキスト 1 で述べた三平方の定理（ピタゴラスの定理）は，もっとも役に立つ定理かもね。図 1.4，左下の直角三角形（直角を挟む 2 辺の長さが a, b，斜辺の長さは c）に対して，再び記せば，

$$a^2+b^2=c^2 \quad \cdots \quad ②$$

■

例題 1.1. 図のような直角三角形 ABC の辺 BC 上に，∠ADC= 60° となるように点 D をとる。AC= 2cm である。△ABD の面積が △ADC の面積の 2 倍のとき，辺 AB と辺 AD の長さの比 $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}}$ を求めよ。



解答）△ADC は，3 辺の比が $1:2:\sqrt{3}$ の三角形なので，$1:\sqrt{3}=\mathrm{DC}:2$ より，

DC= $\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$. また，AD= $\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$. △ADC の面積の 2 倍が △ABD の面積なので，BD=2DC= $\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$.

このとき，BC=BD+DC= $\dfrac{4}{3}\sqrt{3}+\dfrac{2}{3}\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.

三平方の定理より，$\mathrm{AB}^2=(2\sqrt{3})^2+2^2=16$,

$\therefore \mathrm{AB}=4.$. 以上より，$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}}=\dfrac{4}{\frac{4}{3}\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$ ♡

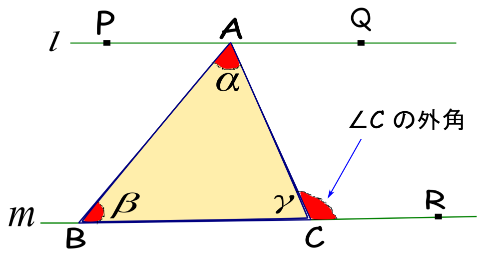


図1.5　三角形の内角の和

定理 1． (a) 三角形の内角の和は 180° である：

$$\alpha+\beta+\gamma=180^{\circ}.$$

(b) 三角形の 1 つの外角は，それととなり合わない 2 つの内角の和に等しい（例えば）:

$$\angle\mathrm{ACR}=\alpha+\beta.$$

証明）(a) 図 1.5 のような三角形 ABC で考えよう。∠A, ∠B, ∠C の内角をそれぞれ α,β,γ とする。線分 BC を左右に伸ばした直線を m，m 上右端にある 1 点を R とする。点 A を通り，直線 m に平行な直線を l，l 上左端にある点を P, 右端にある点を Q とする。　錯角は等しいので　∠PAB= β, ∠QAC= γ $\cdots$ ③

また，∠PAB+α + ∠QAC= 180° は明らか。したがって，③より，$\alpha+\beta+\gamma=180^{\circ}$. $\cdots$ ④

(b) 点 C を中心に角度を考えると，　γ + ∠ACR= 180° $\cdots$ ⑤

④−⑤ より，$\alpha+\beta-$ ∠ACR= 0°，よって，　∠ACR= $\alpha+\beta$. □

［注意］ (a) の結果は，三角形が鈍角三角形でも同じですよ。図を描いて確かめて下さい。
(b) の内容は，(∠A の外角)= $\beta+\gamma$，(∠B の外角)= $\alpha+\gamma$ をも含んでいるよ。この結果を，三角形の外角の和の公式と呼ぶことにしよう

例題 1.2. 次の図で，$l \,/\!/\, m$ のとき，$\angle x$，$\angle y$ の大きさを求めよ。

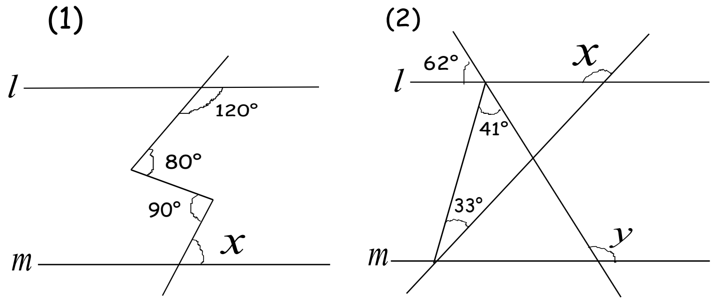


図1.6　平行線と角

解答） (1) 補助線（図 1.7 きみどりの線）を 1 本引きましょう。分かる角度を順番に求めて下さい。 $\alpha = 60^o$，$\beta = 100^o$，$\gamma = 20^o$，だから，γ の錯角と x の和は 90^o より，$x = 70^o$.
(2) この図は補助線はいらない。下図の α，β，$\cdots$ の角度を計算すると，$\alpha = 118^o$． y はこれの同位角より $y = 118^o$．$\beta = 41^o + 33^o = 74^o$， $\gamma = 44^o$ が分かるので，$x = 180^o - 44^o = 136^o$. ♡

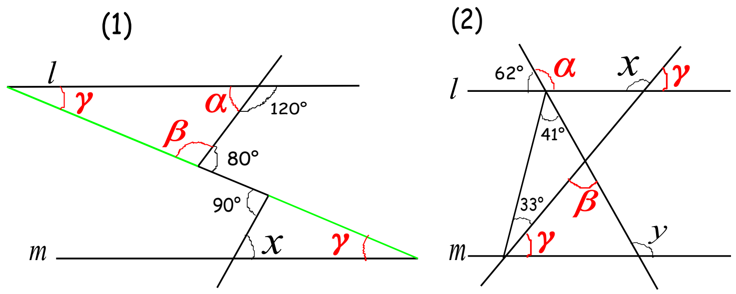


図1.7　補助線と角

さて，図形には合同という概念と，相似（縮小または拡大）という概念があります。1 つの図形を平行移動したり，回転させたり，裏返ししたりした図形は元の図形と合同であるといいます。

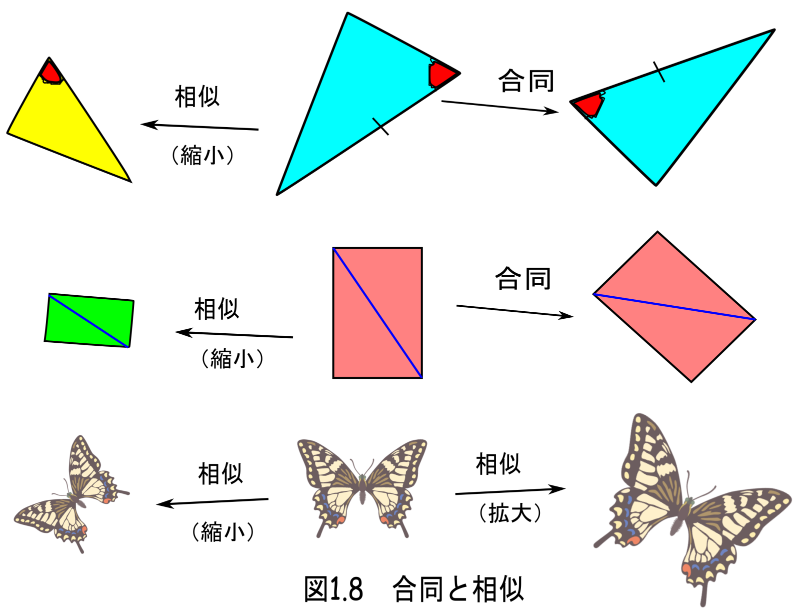


図1.8　合同と相似

図 1.8 は，まん中の図形を，平行移動，回転，裏返し，拡大・縮小などを使って移動したものを左右に描きました。たがいに合同な図形は，平行移動，回転，裏返しなどを使えば重ね合わせることができます。大きさの異なるたがいに相似な図形は，対応する各頂点の角度は同じで，対応する辺の長さの比は，どの辺を選んでも一定です。

さて，２つの三角形が合同になる条件をあげよう。

♠［三角形の合同条件］次の３つの条件のうち，いずれかが成り立つとき合同である。

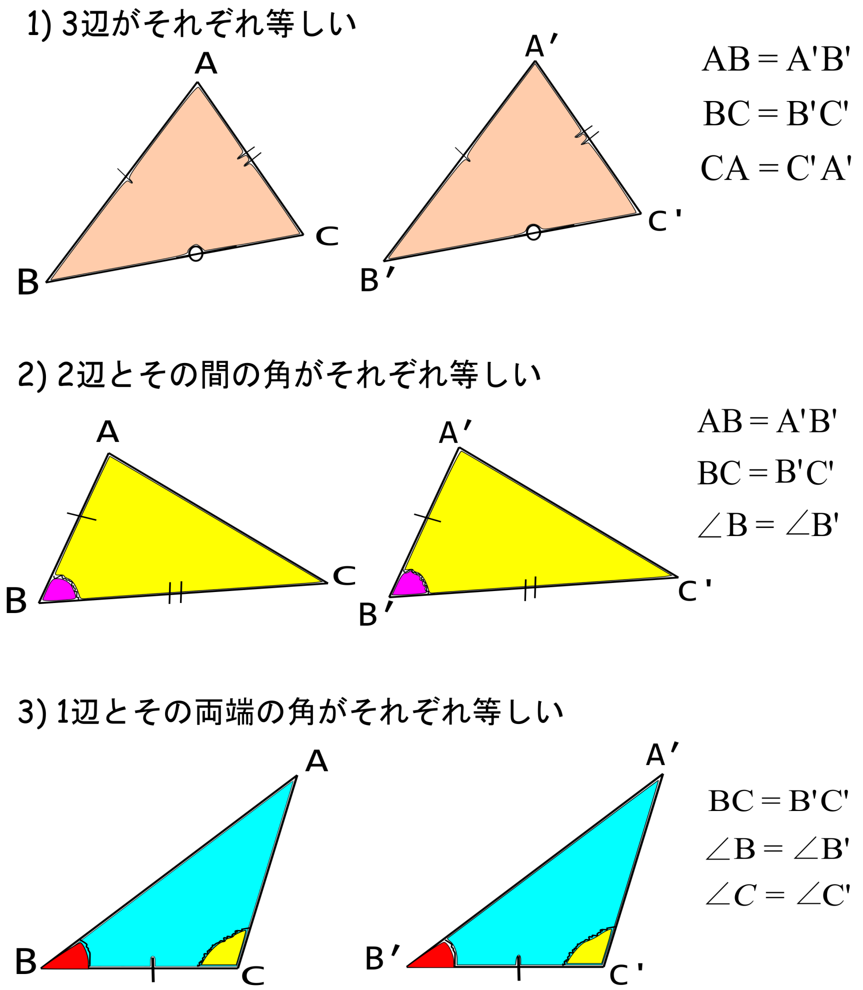
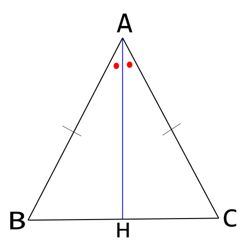


図1.9　三角形の合同

$\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ が合同のとき，$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$　$\cdots$　⑥　とかきます。⑥のような表現では，三角形の対応する頂点は対応する順番でかいてよ（A,B,C は A', B', C' と対応する）。♠

例題 1.3. AB=AC の二等辺三角形 ABC では，∠B= ∠C である。これを証明せよ。



証明） ∠A の二等分線をひき，辺 BC との交点を H とする（右図参照）。
$\triangle ABH$ と $\triangle ACH$ について，2 辺とその夾角が等しい：
　AB=AC, ∠BAH= ∠CAH, AH は共通
だから，　$\triangle ABH \equiv \triangle ACH$.　したがって，∠B= ∠C.　□

［注意］∠BHC は 180° なので，∠BHA= ∠CHA= 90°　は明らか。

定理２．２つの直角三角形は，次のどちらかが成り立つとき合同である。

(1)　斜辺と１つの鋭角がそれぞれ等しい。

(2)　斜辺と他の１辺がそれぞれ等しい。　　（下図参照）

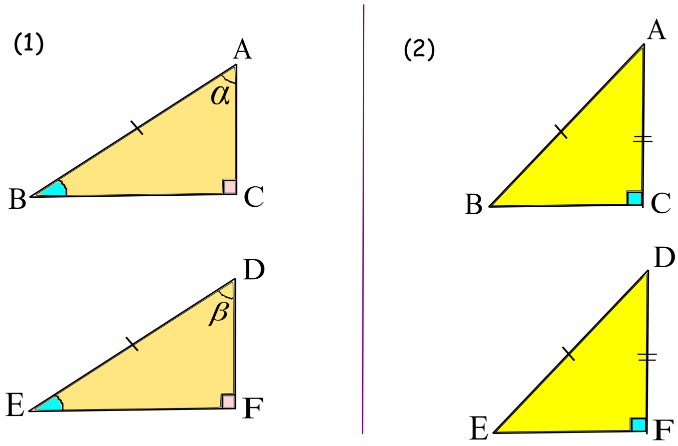


図1.10　直角三角形の合同

証明）(1) △ABC と △DEF について，AB=DE, ∠ABC= ∠DEF が成り立っているとすと，∠ABC+$\alpha = 90^o$，∠DEF+$\beta = 90^o$　だから，$\alpha = \beta$．斜辺とその両端の角が等しいので
　△ABC ≡ △DEF.

(2) AB=DE, AC=DF とする。△DEF を裏返しして DF と AC が重なるように，△ABC の右に並べると，△ABE は AB=AE の二等辺三角形になる。したがって，∠B= ∠E. 直角も等しいので，対応する３つの角はすべてが等しい。よって，∠BAC= ∠EDF. ２辺とその間の角がそれぞれ等しいので　△ABC ≡ △DEF.　□

［注意］斜辺の長さが c, 他の２辺が b, c の直角三角形 ABC と，斜辺の長さが c', 他の２辺が b', c' の直角三角形 DEF では，$a^2 + b^2 = c^2$，$a'^2 + b'^2 = c'^2$ が成り立つので，もし，対応する２辺が等しい（例えば，$a = a'$，$b = b'$ または $a = a'$，$c = c'$）ならば，他の１辺も等しいことがわかる。したがって，

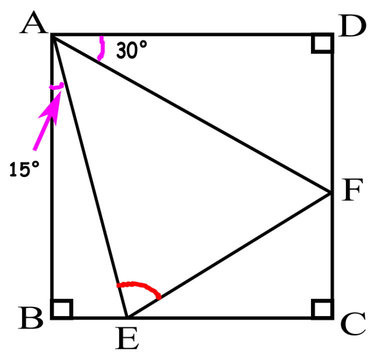
（3）対応する２辺の長さが等しい２つの直角三角形は合同である。

ということがわかる。三平方の定理を学んでいる場合は，この (3) も使ってよい。

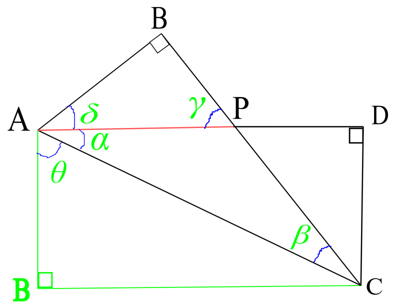
［頭の体操 or 目の体操］

右図の四角形は正方形である。辺BC上に∠BAE＝15°となる点Eを，辺CD上に∠DAF＝30°となる点Fをとる。このとき，∠AEFの大きさを求めよ。

（線対称な図形を考えよ。答えは75°）



例題 1.4.　長方形 ABCD を対角線 AC で折って，辺 BC が AD と重なった点を P とする（右図参照)。このとき，三角形 PAC は二等辺三角形であることを証明せよ。



証明) 図の緑色で示したように角度 α, β, γ, δ, θ を定義する。

$\alpha+\delta=\theta \quad \cdots \quad$ (i),

$\theta+\alpha=90^{\circ} \quad \cdots \quad$ (ii)

(i),(ii) より，$\alpha+\delta=90^{\circ}-\alpha$,

$2\alpha=90^{\circ}-\delta=\gamma \quad \cdots \quad$ (iii)

また，$\alpha+\beta=\gamma. \quad \cdots \quad$ (iv)

(iii),(iv) より，$2\alpha=\alpha+\beta$,　$\therefore \ \alpha=\beta$.　△PAC は，２つの角が等しいので，PA=PC の二等辺三角形である。 □

さて，２つの相似な図形について考えよう。相似とは簡単にいうと，形が同じで大きさが異なる２つの図形のことである。したがって，一方を縮小または拡大して，平行移動や裏返し，回転などを行うと，他方に重ねることができる。相似な図形では，

(1)　対応する線分の長さの比は，すべて等しい。この比 (の値) を相似比という。

(2)　対応する角の大きさは，それぞれ等しい。

三角形 ABC と三角形 A′B′C′ が相似のとき，$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ とかく。このとき，対応する頂点を順に並べて書く。２つの三角形は，次の３つの条件のいずれかが成り立てば，相似である。

♠［三角形の相似条件］

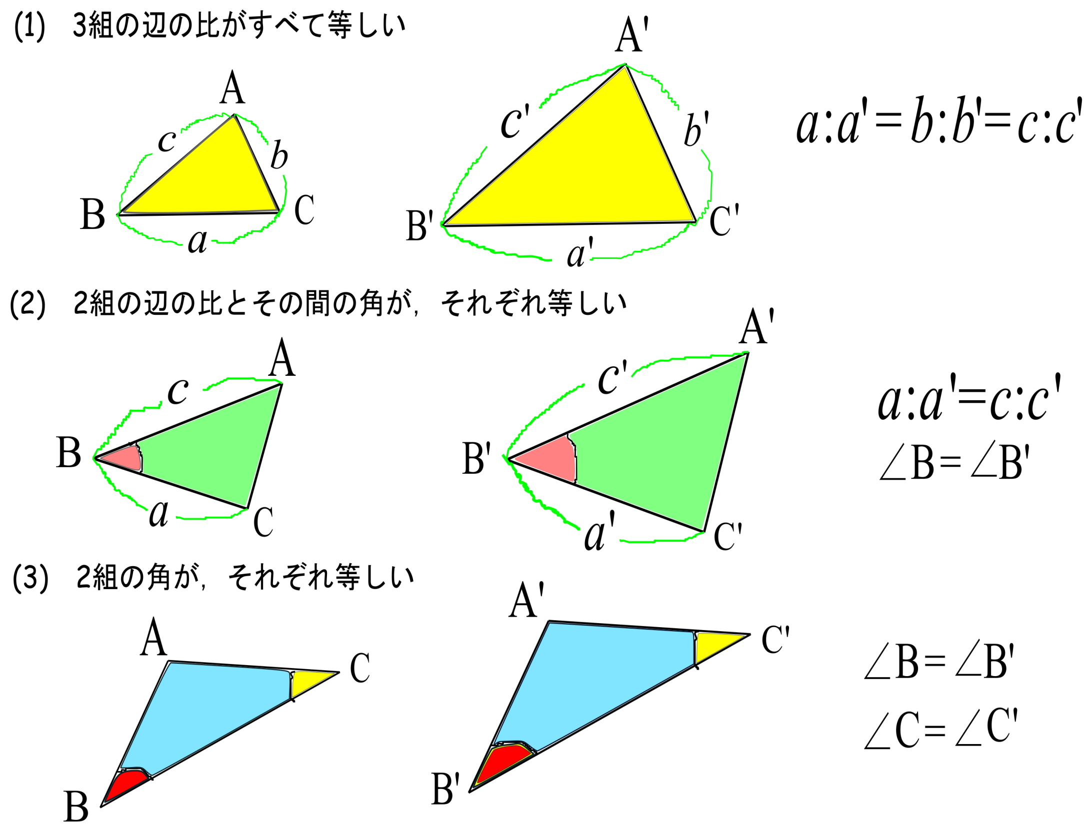
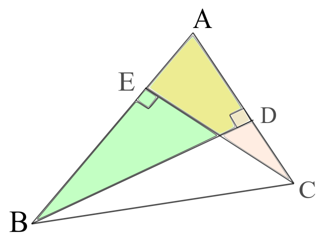


図1.11　三角形の相似条件

例題 1.5. 右図の △ABC で，点 B,C から辺 AC,AB に
それぞれ垂線ＢＤ, ＣＥをひく。このとき，

$$\triangle ABD \backsim \triangle ACE$$

となることを証明せよ。



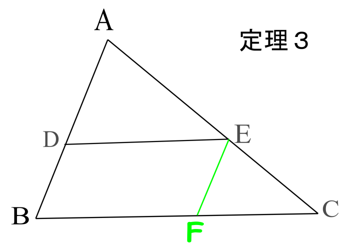
証明） △ABD と △ACE について，

$\angle$A は共通 $\cdots$ (i)

$\angle$ADB= $\angle$AEC= 90°. $\cdots$ (ii)

(i),(ii) より，2 角が等しいので，

△ABD ∽ △ACE. □



定理３. [三角形と比の定理]
△ABC の辺 AB,AC 上にそれぞれ点 D,E をとり，DE // BC
となるようにする。次の比例式が成り立つことを証明せよ。
（右図参照）

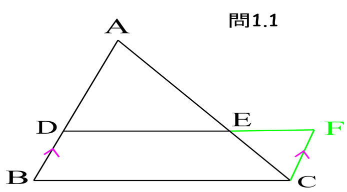
(1) AD : AB=AE : AC=DE : BC
(2) AD : DB=AE : EC

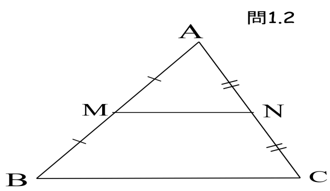
証明） (1) △ADE と △ABC について，$\angle$A は共通。DE // BC
より，$\angle$ADE= $\angle$ABC. 2 角が等しいので △ADE ∽ △ABC. よって
AD : AB=AE : AC=DE : BC.

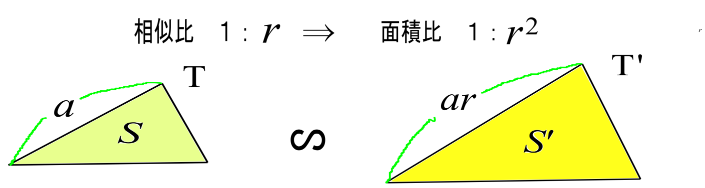
(2) AB // EF となるように BC 上に点 F をとる。△ADE と △EFC について，
$\angle$AED= $\angle$ECF（同位角），$\angle$EAD= $\angle$CEF（同位角）より，2 角が等しいので
△ADE ∽ △EFC，∴ AD : EF=AE : EC. EF=DB だから AD : DB=AE : EC. □

問 1.1. ［三角形と比の定理の逆］
△ABC の辺 AB,AC 上の点をそれぞれ D,E とするとき，次のことが成り立つことを証明せよ。
(1) AD : AB=AE : AC ならば，DE // BC.
(2) AD : DB=AE : EC ならば，DE // BC. （下図参照）

問 1.2. ［中点連結定理］
△ABC の 2 辺 AB,AC の中点をそれぞれ M,N とすると， MN // BC, MN= $\frac{1}{2}$BC となることを証明せよ。（下図参照）







■★ 2 つの三角形 T, T' は相似で，相似比が 1 : r のとき，面積比は $S : S' = 1 : r^2$ である。なぜならば，T の底辺を a，高さを h とすると $S = \frac{1}{2}ah$, $S' = \frac{1}{2}(ar)(hr) = \frac{1}{2}ahr^2$. だから。
（上図参照） ■

§ 1.3　**四角形の性質**　四角形について考えよう。正方形，長方形は小学生の頃からなじみな図形だよね。よく現れる四角形を下に並べるよ。図形の下に書いてある性質を定義と思って下さい。形が定まらない四角形はたくさんあります。

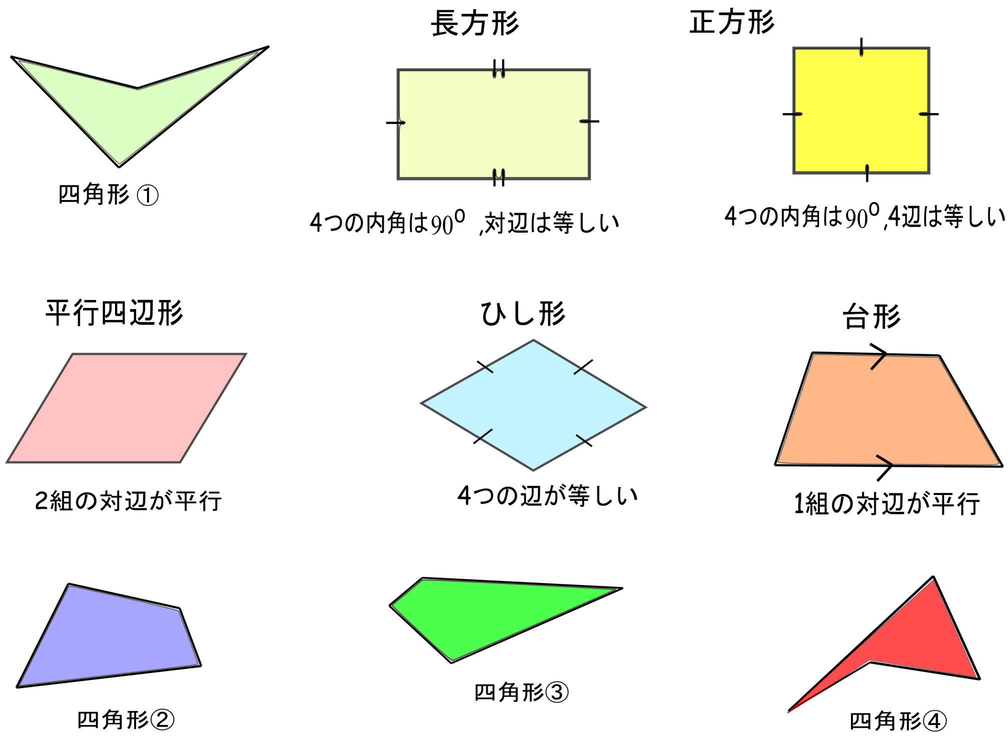


図1.12　いろいろな四角形

さて，平行四辺形の定義は,「2 組の対辺が平行である」･･･ (†)　であったが，これと同等（同値）な命題を考えよう。

(1) 右図の四角形 ABCD は，2 組の対辺が平行な平行四辺形とする。△ABD と △CDB について，2 組の平行線の錯角がひとしいので，

$\angle$ADB= $\angle$CBD,　$\angle$DBA= $\angle$BDC,

また，BD は共通なので，一辺とその両端の角が等しいので

△ABD≡ △CDB. ∴ $\angle$DAB= $\angle$BCD（角 α).

同様にして，△ACD≡ △CAB がいえるので，$\angle$ADC= $\angle$CBA（角 β). すなわち，次の命題が成り立つ。

二組の対角がそれぞれ等しい　･･･ (i)

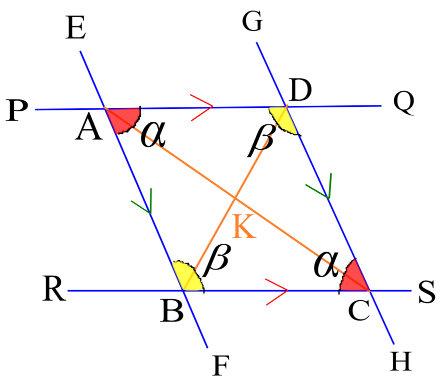


図1.13　平行四辺形

逆「(i) ならば (†)」が成り立つかどうか考えよう。

等しい 2 組の対角を，それぞれ α, β とすると，

定理 7 より $2\alpha+2\beta=360^{\circ}$,　∴ $\alpha+\beta=180^{\circ}$. よって，$\angle$PAB= β. EF と GH の同位角（$\angle$PAB と $\angle$ADC）が等しいので，AB // DC.　また，$\angle$ADG= α，PQ と RS の同位角（$\angle$ADG と $\angle$BCD）が等しいので，AD // BC. よって，命題 (†) と (i) は同値。

(2) (†) ならば,「2 組の対辺がそれぞれ等しい」を示そう。

(1) の前半の証明から，$\triangle$ABD$\equiv\triangle$CDB がわかる。よって，AB=DC, AD=BC. 即ち

　2 組の対辺がそれぞれ等しい　$\cdots$　(ii)

が分かった。逆を証明しよう。(ii) が成り立っていると仮定すると，$\triangle$ABD と $\triangle$CDB について，AD=CB, AB=CD, BD は共通，より $\triangle$ABD$\equiv\triangle$CDB. よって，$\angle$ADB$=\angle$CBD.　AD と BC の錯角が等しいので AD // BC. また，$\angle$ABD$=\angle$CDB. AB と DC の錯角が等しいので AB // DC. 以上より，(†) と (ii) は同値。

(3) (†) ならば,「2 つの対角線がそれぞれの中点で交わる」を示そう。(†) が成り立てば，2 組の対辺はそれぞれ等しいので，AD=BC.

$\triangle$ADK と $\triangle$CBK について，$\angle$ADK$=\angle$CBK. $\angle$DAK$=\angle$BCK（2 組の平行線の錯角だから）。1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので，$\triangle$ADK$\equiv\triangle$CBK.　よって，BK=KD, AK=KC.

すなわち，

　対角線はそれぞれの中点で交わる　$\cdots$　(iii)

　さて，(iii) が成り立つとき，$\triangle$AKD$\equiv\triangle$CKB　$\cdots$　(a),　　$\triangle$AKB$\equiv\triangle$CKD　$\cdots$　(b).

(a) より，　　$\angle$KAD$=\angle$KCB　（AD と BC の錯角），　$\therefore$　AD // BC.

(b) より，　　$\angle$BAK$=\angle$DCK　（AB と DC の錯角），　$\therefore$　AB // DC.

(†) と (iii) は同値であることが分かった。

(4) (†) が成り立つとき，2 組の対辺はそれぞれ等しい。よって，次の命題が成り立つ。

　　1 組の対辺が平行でその長さが等しい　$\cdots$　(iv)

逆に，(iv) が成り立つとき，すなわち　AB // DC, AB=DC のとき，$\triangle$ABD と $\triangle$CDB を考える。BD は共通な辺，$\angle$ABD$=\angle$CDB（AB と CD の錯角）より，2 辺とその間の角が等しいので　$\triangle$ABD$\equiv\triangle$CDB. $\therefore\angle$ADB$=\angle$CBD（AD と BC の錯角）。よって，AD // BC. 以上より，(†) と (iv) は同値。

　上の考察を次の定理にまとめる。四角形が平行四辺形になるための条件です。

定理 4．四角形は次のどれかが成り立てば，平行四辺形である。

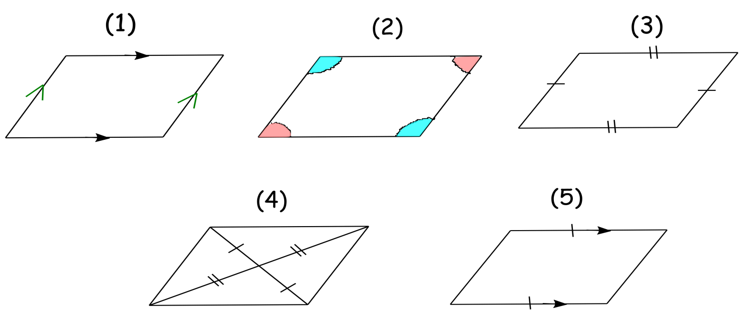
　　(1) 2 組の対辺がそれぞれ平行である。（定義）

　　(2) 2 組の対角がそれぞれ等しい。

　　(3) 2 組の対辺がそれぞれ等しい。

　　(4) 2 つの対角線が，それぞれの中点で交わる。

　　(5) 1 組の対辺が平行でその長さが等しい。



（例）長方形やひし形は，平行四辺形の特別な場合である。また，長方形でかつひし形である四角形は正方形である。

例題 1.6.　平行四辺形 ABCD は，AB$=4$cm, $\angle$ABC$=60^o$，面積は 24cm^2 である。辺 BC の長さを求めよ。

解答） A から BC に垂線 AH（BC 上の点が H）を引くと，△ABH は 3 辺の比が $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形。AH$=2\sqrt{3}$ なので，BC$=x$ とおくと，$2\sqrt{3}\,x=24$. よって，$x=4\sqrt{3}$ (cm).　♡

定理５．長方形，ひし形について次のことが成り立つ。
(1) 長方形の２つの対角線は，長さが等しい。
(2) ひし形の２つの対角線は，垂直に交わる。

証明）（下図 1.14 の左の 2 つを参考にせよ）
(1) △ABD と △DCA は合同である（対応する 2 辺とその間の角が等しい）。よって，BD=CA.
(2) △ABD は二等辺三角形，したがって $\angle$ABD$=\angle$ADB（$=\alpha$ とおく）。同様に，△DAC は二等辺三角形，したがって $\angle$DAC$=\angle$DCA（$=\beta$ とおく）。また，$\angle$BAC$=\beta$（AB と CD の錯角）。よって，△ABD の内角の和は　$2\alpha+2\beta=180^o$,　$\therefore$　$\alpha+\beta=90^o$. ここで，△ABO の内角の和を考えると，$\alpha+\beta+\angle$AOB$=180^o$　より，$\angle$AOB$=90^o$.　□

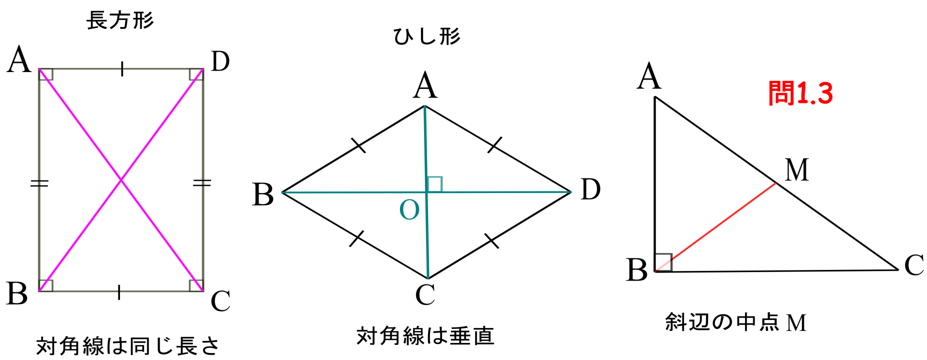


図1.14　対角線

問 1.3. 直角三角形の斜辺の中点 M は，この三角形の 3 つの頂点から等距離にあること示せ。（上図右のもの参照）

■★　台形とひし形の面積は次式で与えられる (下図参照)；

［台形の面積］　$S=\dfrac{1}{2}(a+b)h$　$\cdots$　⑦　（a は上底，b は下底，h は高さ）

［ひし形の面積］　$S=\dfrac{1}{2}ab$　$\cdots$　⑧　（a, b は 2 本の対角線の長さ）　■

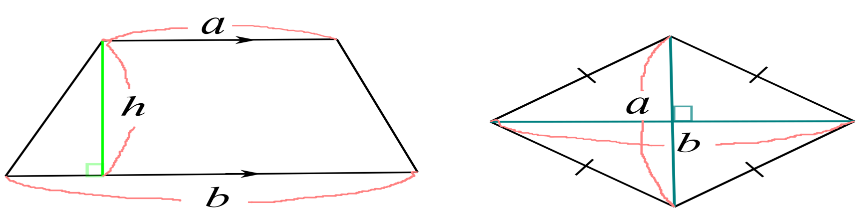
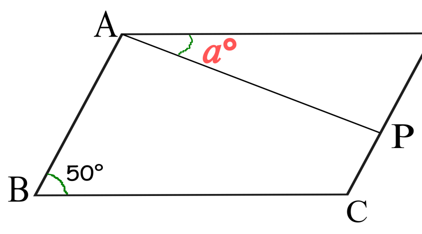
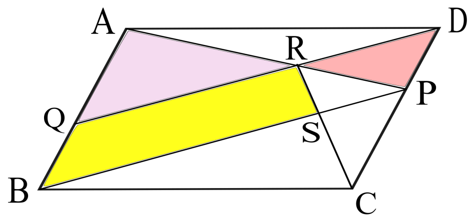


図1.15　台形とひし形の面積

例題 1.7. (1) 平行四辺形 ABCD の辺 CD 上に点 P がある（点 C,D とは異なる)。
$\angle$ABC$=50^\circ$，$\angle$DAP$=a^\circ$ のとき，$\angle$APC を求めよ。(図 (i) 参照)



図(i)



図(ii)

(2) 図 (i) において，点 B と点 P を結び，点 D を通り線分 BP に平行な直線を引き，辺 AB との交点を Q，線分 AP との交点を R とする（図 (ii) 参照)。$\triangle$ABP $\backsim$ $\triangle$PDR を証明せよ。

(3) 点 C と点 R を結び，線分 BP との交点を S とする。CP : PD$=2:1$ のとき，四角形 QBSR の面積は，$\triangle$AQR の面積の何倍か求めよ。　(2019 年東京都)

解答） (1) $\angle$CDA$=50^\circ$. $\triangle$APD において外角の和の公式から，$\angle$APC$=50+a$ (度)。

(2) $\triangle$ABP と $\triangle$PDR において，AB $/\!/$ DC より，$\angle$BAP$=\angle$DPR (錯角)。QD $/\!/$ BP より，$\angle$PDR$=\angle$ABP (平行四辺形 QBPD の対角)。2 角が等しいので　$\triangle$ABP $\backsim$ $\triangle$PDR.　□

(3) $\triangle$ABP $\backsim$ $\triangle$PDR $\backsim$ $\triangle$AQR, AQ : QB$=2:1$ だから，$\triangle$PDR の面積を 1 とおくと，$\triangle$AQR の面積は 4，$\triangle$ABP の面積は 9．したがって台形 QBPR の面積は 5.

ここで，$\triangle$DRC と $\triangle$PSC の面積を求めよう。$\triangle$DRC の面積は，$\triangle$DRP の 3 倍（DR を底辺とすると，$\triangle$DRC の高さは 3 倍）だから，3 である。$\triangle$PSC は $\triangle$DRC と相似で，相似比は $\frac{2}{3}$ だから,（$\triangle$PSC の面積）$=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{3}$.　よって，$\triangle$RSP の面積は $3-1-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$. 以上より，

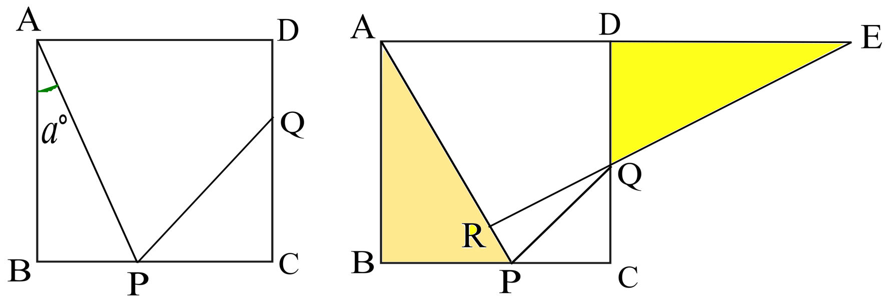
（四角形 QBSR の面積）$=$（台形 QBPR の面積）$-$（$\triangle$PSC の面積）$=5-\frac{2}{3}=\frac{13}{3}$　だから，

（四角形 QBSR の面積）$\div$（$\triangle$AQR の面積）$=\frac{13}{3}\div 4=\frac{13}{12}$.　♡

［注意］（作成者にもの申す）　これは，2019 年の東京都の問題であるが，(3) は難しすぎる（酷な問題)。普通の中学生は解けないでしょう。“$\triangle$PDR の面積は 1”を条件にして，まず台形 QBPR の面積を求めさせ，最後に，四角形 QBSR の面積を答えさせるのが良い。$\triangle$AQR の面積の何倍かなどという設問はくだらない（意味がない)。

問 1.4. (1) 下の図 (i) で，四角形 ABCD は正方形である。点 P は辺 BC 上にある点で，CP=CQ である。頂点 A と点 P，点 P と点 Q をそれぞれ結ぶ。
$\angle$BAP$=a^\circ$ とするとき，$\angle$APQ の大きさを表す式を a を用いて表せ。

(2) 図 (ii) は，図 (i) において，辺 AD を D の方向にのばした直線上にあり　AD=DE　となる点を E，点 E と点 Q を結んだ線分 EQ を Q の方向に伸ばした直線と線分 AP との交点を R とした場合を表している。次の (a), (b) に答えよ。
(a) $\triangle$ABP $\equiv$ $\triangle$EQD であることを証明せよ。
(b) AB=4cm，BP=3cm のとき，線分 EQ の長さと線分 QR の長さの比を最も簡単な整数の比で表せ。（令和 2 年東京都）



図(i)　図(ii)

§ 1.4　**五角形以上の多角形**　まず，正多角形について考える。

♠［定義］$n \geqq 3$ とする。n 個の頂点と n 個の辺をもつ多角形において，すべての辺の長さが等しく，かつ全ての頂点の内角の大きさが等しいとき，この多角形を正 n 角形という。正 n 角形全体を正多角形とよぶ。♠

正三角形と正方形（正四角形）はすでに取り上げた。正五角形から正十角形までを図 1.16 に示す。

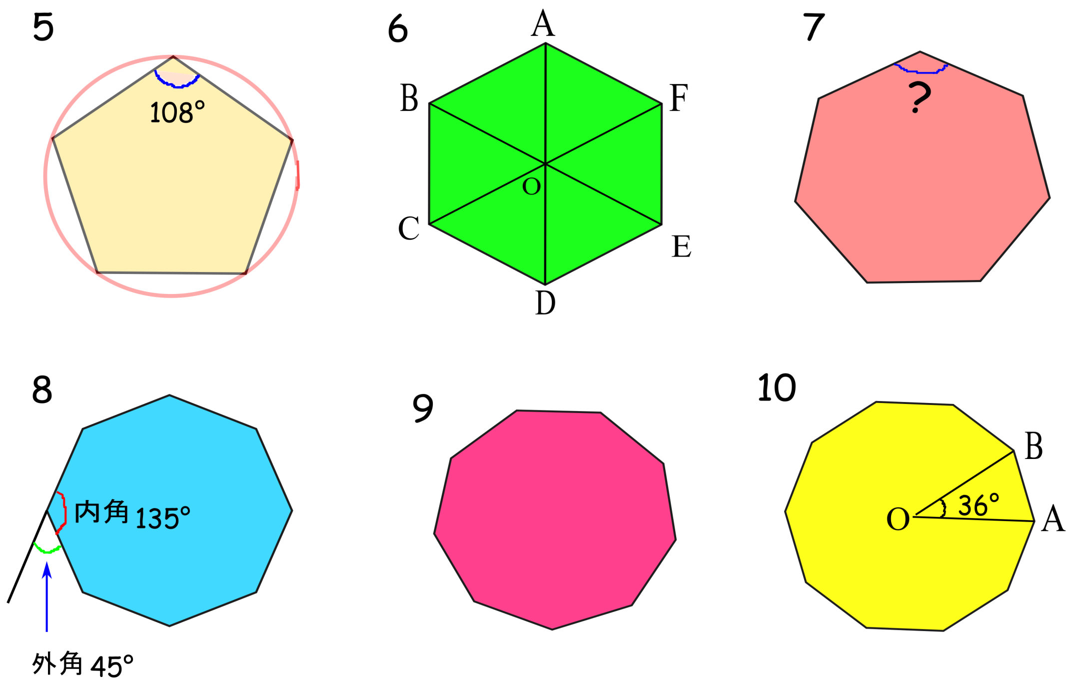


図1.16　正 n 角形

正多角形の作図法を 1 つ示そう。例えば正六角形の場合，

1)　円を 1 つ描き，中心を O とする
2)　円周上に 1 点 A とり，点 O と A を線で結ぶ
3)　∠AOB が 60° になるように円周上に点 B をとる
4)　∠BOC が 60° になるように円周上に点 C をとる（C は A とは異なる点）
　… 　（　3), 4) の操作を繰り返して，点 F まで 6 個の点をつくる）

この方法で作られた，6 角形 ABCDEF が正 6 角形である。（図 1.16 参照）

正六角形は，定規とコンパスで作図する方法がどの教科書にあるのでそれも参考にして下さい。他の正多角形も基本的には，上のように円周上の各頂点と円の中心 O を結ぶ線分の中心角（上の $\angle$AOB，$\angle$BOC など）を測りながら（分度器も使用すること）作ることが可能です。

正六角形の場合，$\angle$AOB$=\dfrac{360}{6}=60$(度) なので，二等辺三角形 AOB の他の 2 角は $\dfrac{180-60}{2}=60$(度)。すなわち，正六角形は正三角形 6 個からできているので，各頂点の内角は 120°。 1 つの頂点の外角は $180-120=60$(度) である。一般に正 n 角形においては次のことが分かる。

1) 正 n 角形の 1 つの内角は　$180\times\dfrac{n-2}{n}$ (度) である，　$\cdots$ ①

2) 正 n 角形の 1 つの外角は　$\dfrac{360}{n}$ (度) である。　$\cdots$ ②

（例）正五角形の各頂点の内角は　108°，外角は　72°　である。
正十角形の各頂点の内角は　144°，外角は　36°　である。

問 1.5. 正七角形，正九角形の各頂点の内角と外角を求めよ。

正多角形の作図は，各頂点を 1 つの円周上に等間隔にとることによって作ることができることを見た。さて，逆の問題を考えよう。正多角形の各頂点は 1 つの円の円周上にあるだろうか？すなわち，正多角形の定義から出発して，それが 1 つの円に内接するかどうかを考えよう。結論は Yes である。五角形で証明してみよう。

定理 6．正五角形は円に内接する。

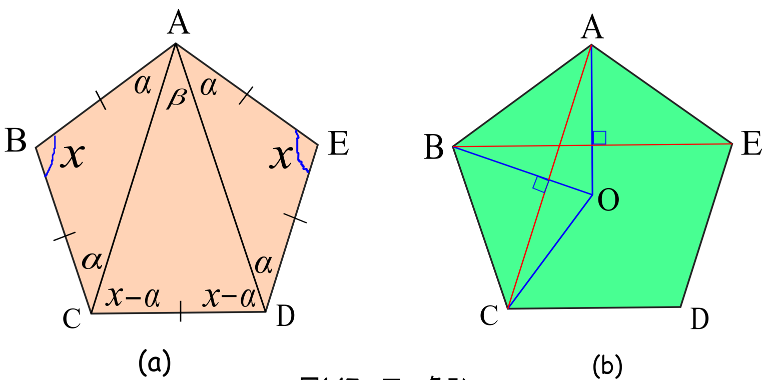


図1.17　正５角形

証明）今， 5 つの辺の長さが等しく， 5 つの頂点の内角がすべて等しい正五角形があるとする。
(1) まず， 内角の大きさを求める。正五角形を 3 つの三角形に分割し（図 (a) をみよ），内角の大きさを x，また 2 つの角度を $\alpha=\angle\mathrm{BAC}$, $\beta=\angle\mathrm{CAD}$ とすると，

$$\begin{cases} x=2\alpha+\beta & \cdots \quad (\mathrm{i}) \\ x+2\alpha=180 & \cdots \quad (\mathrm{ii}) \\ 2x-2\alpha+\beta=180 & \cdots \quad (\mathrm{iii}) \end{cases} \qquad \text{（数字は角度を表す）}$$

(i) より，$\beta=x-2\alpha$，これを (iii) に代入すると，$3x-4\alpha=180$　$\cdots$　(iv).
(ii) より，$2x+4\alpha=360$. これと (iv) をたすと，$5x=540$，　$\therefore$　$x=108$. これより，$\alpha=\beta=36$ を得る。

(2) 5 つの頂点は，1 つの円周上にあることを示す。△ABE の角 A の 2 等分線と，△BCA の角 B の 2 等分線が交わる点を O とする（図 (b) 参照)。

△ABO と △CBO について，AB=CB，$\angle$OBA= $\angle$OBC= 54°，辺 OB は共通。すなわち，対応する 2 辺とそのはさむ角が等しいので △ABO ≡ △CBO. よって，OA=OB=OC, $\angle$BCO= 54°.

△BCO と △DCO について，BC=DC, $\angle$BCO= $\angle$DCO= 54°，辺 OC は共通なので，
△BCO ≡ △DCO. よって，OB=OC=OD, $\angle$CDO= 54°.

同様にして，OD=OE がわかるので，OA=OB=OC=OD=OE. したがって，5 つの頂点は同一円周上にある。 □

［注意］上の証明は，円の性質を使えばもっと簡単にできる。円については次の章で学ぶので，学んだあと，挑戦してみて下さい。

さて一般の多角形では，内角が 180° 以上になるものもある。このとき，外角はどのように定義すればよいでしょう。次のように定義します。

♠［外角の定義］ （$\angle$A の外角）= 180°−（$\angle$A の内角）. ⋯ ③

外角は負になることがあります。図 1.18 の右図で，$\angle$I の内角が 250° のとき，$\angle$I の外角は −70° になります。 ♠

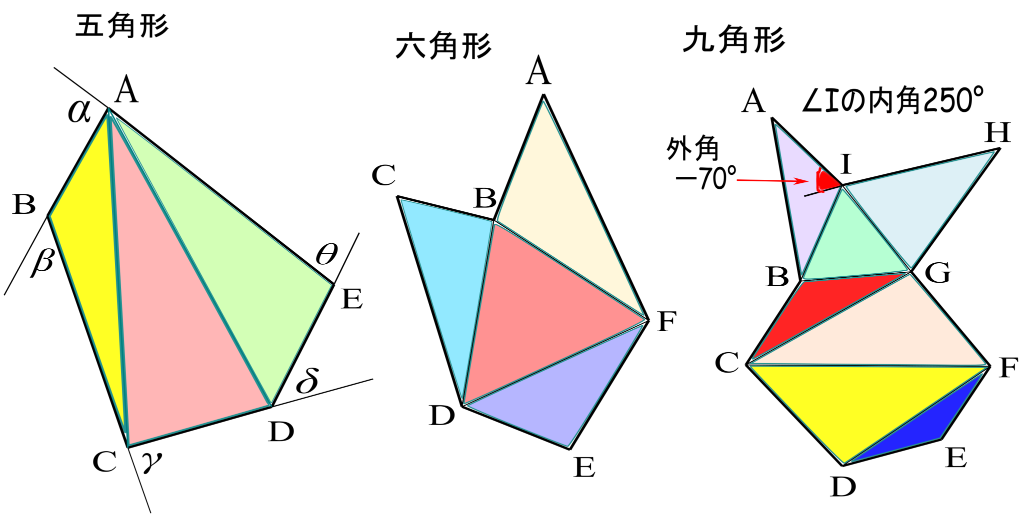


図1.18 三角形分割

上の図で見るように，多角形は頂点を結ぶ線分によって三角形に分割できます。左の五角形は 3 つの三角形に，六角形は 4 つの三角形に，九角形は 7 つの三角形に分割できてますよね。分割のしかたは何通りかありますが，分割された三角形の個数は，n 角形に対して $(n-2)$ 個です（この証明は，中学校のレベルでは難しいので省略します，悪しからず)。

内角の和と，外角の和を考えてみましょう。左の図の五角形で，内角を $\angle$A, $\angle$B, ⋯, $\angle$E，これらの外角を $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta$ とすると，内角の和は，分割された三角形の内角の和に等しいので，

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 3 \times 180 = 540 \text{（度）} \quad \cdots \text{④}.$$

各頂点の内角と外角の和はそれぞれ 180° なので

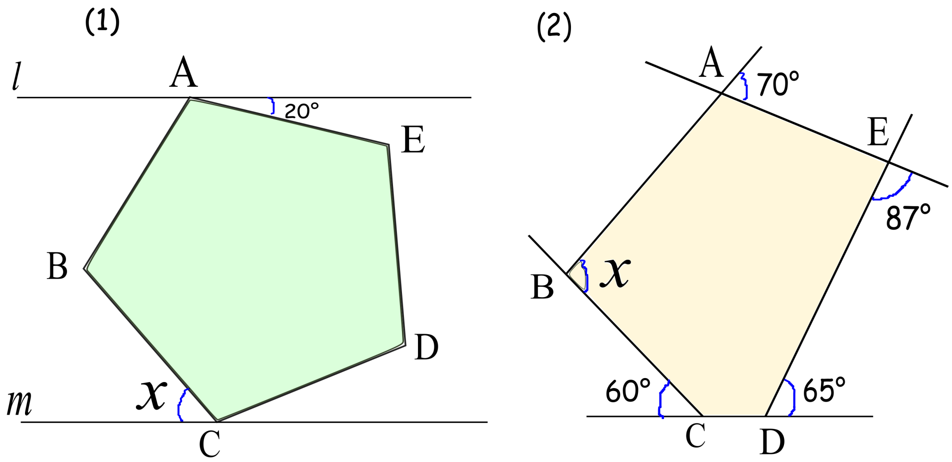
$$\angle A + \alpha + \angle B + \beta + \ \cdots \ + \angle E + \theta = 5 \times 180 \text{（度）}, \quad \text{よって}$$
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \theta = 5 \times 180 - 3 \times 180 = 360 \text{ (度)} \quad \cdots \text{⑤}.$$

一般の n 角形の場合も，上の 5 角形の場合と同様に計算でき，内角の和は $180 \times (n-2)$ (度)，

外角の和は 360^o となる。式④と⑤ の 3, 5 をそれぞれ $(n-2)$, n でおきかえればよい。以上より次の定理を得る。

定理７． 1) n 角形は，その頂点を三角形の頂点とする $(n-2)$ 個の三角形に分割できる。
2) n 角形の内角の和は $180 \times (n-2)$（度）である。
3) n 角形の外角の和は 360^o である。

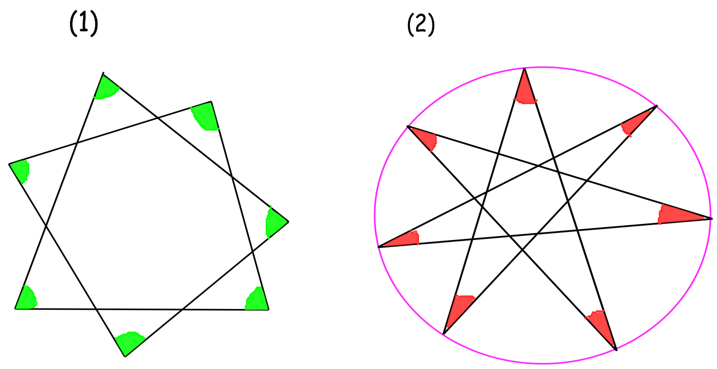
例題 1.8. 次の図で，$\angle x$ の大きさを求めよ。ただし，(1) で，2 直線 l, m は平行であり，五角形 ABCDE は正五角形である。



例題1.8

解答）(1) $\angle$A の内角は 108^o, なので，直線 l と線分 BA のなす角は 52^o. 直線 AB の延長が直線 m と交わる点を F とすると，$\angle$BFC$= 52^o$. また，$\angle$FBC$= 72^o$ なので，$x = 180 - (72 + 52) = 56$（度）。
(2) 角 A,C,D,E の内角を求めると，それぞれ 110, 120, 115, 93 度なので，角 B の内角は
$x = 180 \times 3 - (110 + 120 + 115 + 93) = 102$（度）。
（別解）角 B の外角を y とすると，$y + 70 + 87 + 65 + 60 = 360$ より，$y = 78$（度），
したがって，$x = 180 - 78 = 102$(度)。 ♡

問 1.6. 次の図 (1), (2) の同じ色のついた角の和を求めよ。(2) の外接円は特別な意味はない。



問1.6　角の和

第 2 章　円

§ 2.1　**円周角の定理**　円と直線，円と多角形の関係について 1 つずつ学ぼう。面白い結果に出会えるといいね。

■★　中心が O，半径 r の円の面積 S と周の長さ l は，

面積：　$S = \pi r^2$,　　周の長さ：　$l = 2\pi r.$　　$\cdots$ ①

★ 中心角が α^o，弧 AB のおうぎ形（下図左, そら色の部分）については，

$$\text{おうぎ形の面積} = \pi r^2 \times \frac{\alpha}{360},\qquad \text{おうぎ形の弧 AB の長さ} = 2\pi r \times \frac{\alpha}{360}.\qquad \cdots ②$$

(例)　半径 2 の円で，中心角が 60^o のおうぎ形 OAB の $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の長さ l は

$$l = 2\pi \times 2 \times \frac{60}{360} = \frac{2}{3}\pi = 2.09439\cdots.$$

［参考］円周率 π は，$\pi = 3.141592653589793\cdots$（無理数）です。上の例の弧の長さは，各辺が 2 の正三角形の一辺よりちょっと長いですね。

★1 点 T で円に接している直線は接線と呼ばれる。このとき，T を接点と呼ぶ（下図, 右参照）。接線 l は，直線 OT と直角に交わる。■

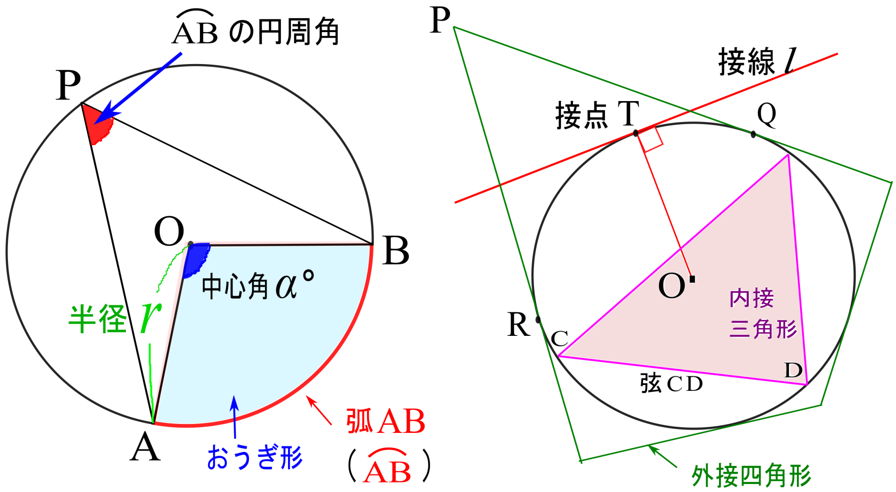


図2.1　円にかかわる図形と用語

♠★ 円 O と言ったとき，中心が O 半径 r（r は分からなくてもよい）の円を表す。円 O において，$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ 上にない円周上の点を P とするとき，$\angle$APB を $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角という（上図, 左参照）。

★（上図, 右参照）　三角形の 3 つの頂点が 1 つの円の周上にあるとき，この三角形は円に内接するという。また，図のような線分 CD は弦と呼ばれる。

四角形の各辺が 1 つの円に接するとき，この四角形は円に外接するという。図の PQ と PR は共に接線なので PQ=PR が分かる。なぜならば，$\triangle$PRO と $\triangle$PQO は共に直角三角形で対応する 2 辺が等しい（OR=OQ，OP は共通）ので，合同であるからである。

(例）半径 5 の円 O に対して，円の外部の点 P を通る接線の接点を T とする。PT$= 12$ のとき，点 P と点 O の距離を求めよ。

解答）PO の長さを x とおくと，三平方の定理より，$5^2 + 12^2 = x^2$ だから，$x^2 = 169$，$\therefore\ x = 13.$

♠

弧 AB に対する円周角と中心角の大きさを調べよう。下の全ての図で，中心角は黄色，円周角は紅色で表してあることに注意せよ。最初に，図 2.2 (1) のように点 P が $\stackrel{\frown}{AB}$ の反対側にある場合を考えよう。$\stackrel{\frown}{AB}$ の円周角は中心角の半分であることを示す。

証明） 線分 PQ は円 O の直径である。OP=OA=OB だから，$\angle$APO= $\angle$PAO= α, $\angle$BPO= $\angle$PBO= β. 三角形の外角の和の公式より，$\angle$AOQ= 2α, $\angle$BOQ= 2β, したがって，$\angle$AOB= $2(\alpha+\beta) = 2\angle$APB. 点 P が左に少し動いて点 P' の位置にあったとしても証明は同じであることに注意して下さい。 □

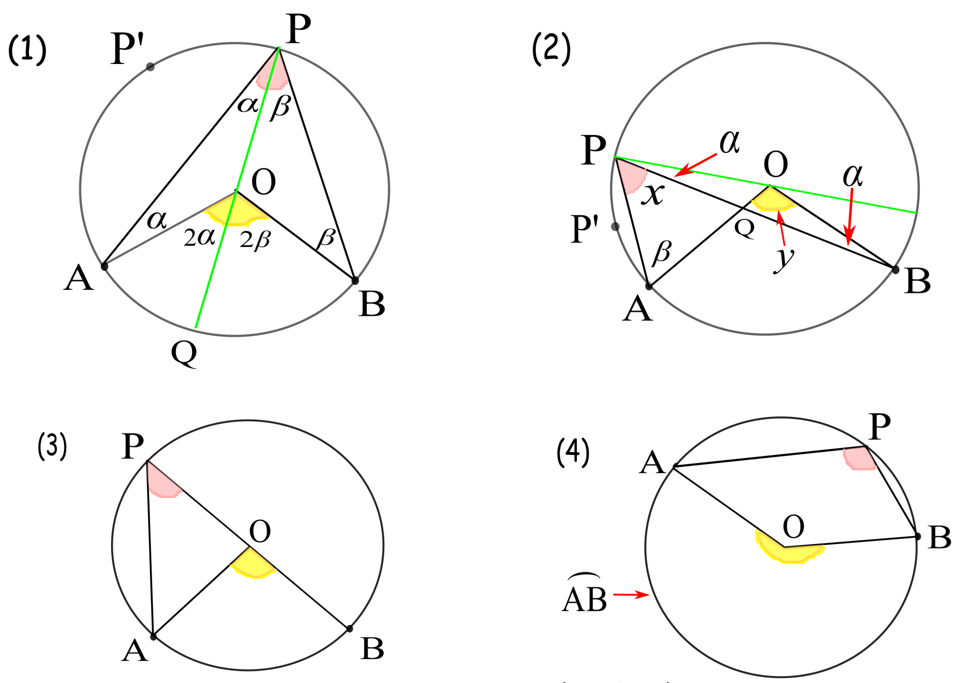


図2.2 円周角と中心角

図 (2) で同じことを証明する。円周角を x，中心角を y とおく。

証明） $\angle$OPQ= $\angle$OBQ= α, $\angle$OAP= β とおくと，$\beta = x+\alpha$, $\quad\therefore\ \angle$PQO= $2x+\alpha$.

$\triangle$OQB において，$\angle$OQB= $180-(2x+\alpha)$ だから，この三角形の内角の和は

$$180-(2x+\alpha)+\alpha+y = 180, \quad \rightarrow \quad -2x+y=0, \quad \therefore \quad y=2x.$$

点 P が P' の位置にあっても証明は同じであることに注意されたい。 □

$\stackrel{\frown}{AB}$ と点 P の位置関係を考えると上の図の (3),(4) のケースが残っているが，これらに対する証明は読者にゆずる。

問 2.1 図 2.2 の (3),(4) のケースについて，円周角は中心角の半分であることを証明せよ。

以上の結果をまとめると次の円周角の定理を得る。

定理８．円 O の 1 つの弧に対する円周角の大きさは一定で，その弧に対する中心角の半分である。特に，半円の弧に対する円周角は 90^o である。

さて，1 つの円 O において，$\stackrel{\frown}{AB}$ と $\stackrel{\frown}{CD}$ の長さが等しいならば，線分 AB と CD の長さも等しいのは明らかである。逆は真ではない。なぜならば，AB=CD であってもこれらの弦に対する弧はそれぞれ 2 つずつあるからです。円周角と弧の間には次の性質が成り立つ。中心角をうまく利用すれば証明はやさしい（読者におまかせします）。

定理９．１つの円において

1) 等しい円周角に対する弧の長さは等しい。

2) 等しい長さの弧に対する円周角は等しい。

［注意］この結果は，半径の等しい２つの円においても成り立ちます。

例題 2.1. 図 2.3 において，O は円の中心である。各図において，図のように一か所だけ角度が分かっている。((1)…平成 31 年神奈川，(2)…令和 2 年東京都)

(1) 図 (1) の $\angle x$ の大きさを求めよ。ただし，AB=AC（長さが等しい）とする。

(2) 図 (2) の $\angle x$ の大きさを求めよ。ただし，線分 AB は直径，$\angle$BDC= $\angle$AOC とする。

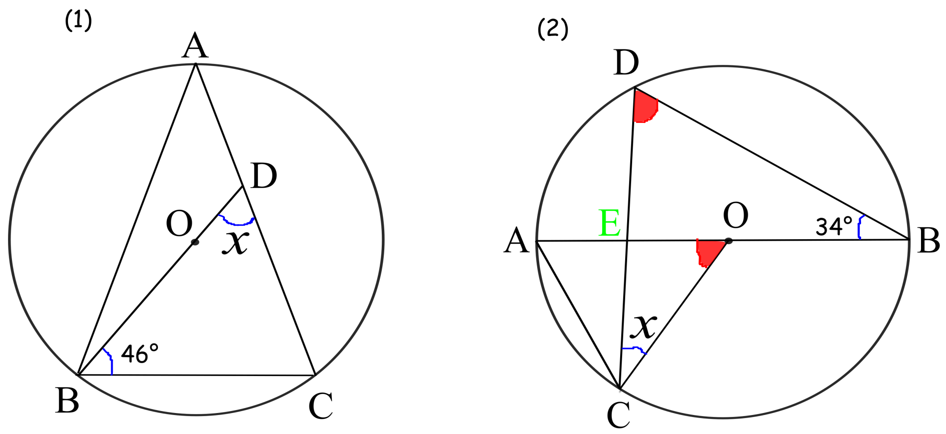


図2.3　例題2.1

解答）(1) 直線 BD をのばし，円 O と交わる点を E とする。△BCE は $\angle$C が 90^o の直角三角形なので，$\angle$BEC$= 44^o$. △ABC において，$\angle$A$= 44^o$. したがって　$\angle$ABC$= 68^o$　なので，$\angle$ABD$= 22^o$. △ABD において，外角の和の公式より　$x = 44 + 22 = 66$（度）.

(2) 線分 AB と CD の交点を E とする。$\angle$CDB$= \alpha$ とおくと，$\angle$AOB$= 3\alpha = 180^o$.

$\therefore$　$\alpha = 60^o$. △DEB において，$\angle$DEB$= 180 - (34 + 60) = 86$（度）. △OEC において，外角の和の公式より，$x + 60 = 86$,　$\therefore$　$x = 26$（度）.　♡

ここで，円周角の定理の逆を考えよう。図 2.4 (1) のような 4 点 A,B,P,Q があったとき，この 4 点は，1 つの円の周上にあるかという問題である。答えが Yes であることは直観的に分かると

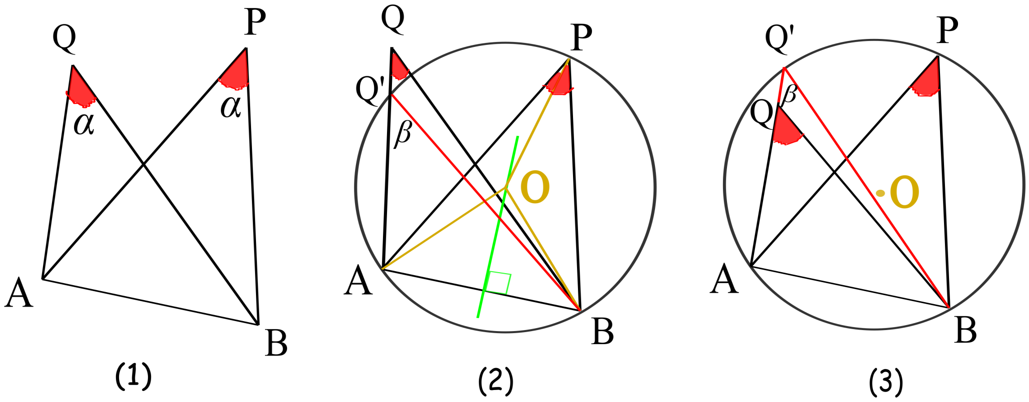


図2.4　円周角の定理の逆

思いますが，証明しましょう。円周角の定理の逆の定理です。

定理 10. 4 点 A,B,P,Q について，P,Q が直線 AB の同じ側にあって　∠APB= ∠AQB　ならば，この 4 点は 1 つの円周上にある。

証明） 図 2.4 において，Q' は円周上の点，α, β は図に示された角とする。△ABC の内部に点 O を，OA=OB=OP となるようにとる。すると，3 点 A,B,P は円 O の周上にある（上図 (2) 参照)。さて，4 つ目の点 Q がこの円周上にはなく，円 O の外側にあると仮定しよう。図 (2) より

$$\angle \mathrm{BQQ'} + \angle \mathrm{QBQ'} = \angle \mathrm{BQ'A} = \beta \quad \to \quad \alpha + \angle \mathrm{QBQ'} = \beta \qquad \therefore\ \beta > \alpha.$$

これは，円周角の定理に矛盾する。

同様に，点 Q が円 O の内部にあったと仮定しよう（図 (3))。このとき，

$$\angle \mathrm{BQ'Q} + \angle \mathrm{Q'BQ} = \angle \mathrm{BQA} = \alpha \quad \to \quad \beta + \angle \mathrm{Q'BQ} = \alpha \qquad \therefore\ \beta < \alpha.$$

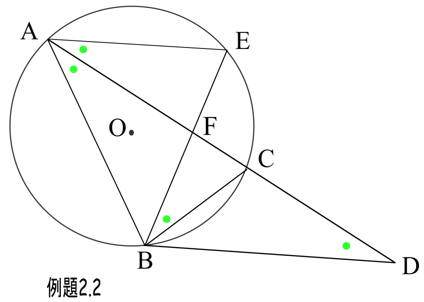
これは，円周角の定理に矛盾する。以上より，点 Q は円 O の周上になければならない。 □

［参考］ある命題を証明するのに，その命題の否定命題から矛盾を導くことによって証明する方法は背理法と呼ばれています。例えば，“ $\sqrt{2}$ は無理数である“ を証明するとき，“ $\sqrt{2}$ は有理数である“ と仮定して，矛盾を導く方法です。この証明はほとんどの教科書にのっているので，もう一度復習しておきましょう。上の証明も背理法です。

例題 2.2. 右図において，3 点 A,B,C は円 O の円周上の点であり，AB=AC である。AC の延長上に BA=BD となる点 D をとる。$\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$ 上に ∠BAC= ∠CAE となる点 E をとる。AC と BE の交点を F とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) △ABF≡ △DBC であることを証明せよ。

(2) 円 O の半径が 5cm で，∠AFB= 102° のとき，$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ に対する中心角の大きさを求めよ。また，$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ の長さを求めよ。ただし，円周率は π とする。　（静岡県）



例題2.2

解答） (1) **証明）** 問題文の仮定より，緑色の点がある 4 つの角度は等しい。これらの角度を θ とおく。△ABC は二等辺三角形なので，∠ABF を α とおくと，∠ACB= $\theta + \alpha$. △DBC で，外角の和の公式より，$\theta +$ ∠DBC= $\theta + \alpha$ だから，∠DBC= α. すなわち， △ABF と △DBC において，1 辺（BA と BD）と その両端の角（θ と α）がそれぞれ等しいので，合同である。 □

(2) ∠AFB= ∠FCB+∠CBF= $2\theta + \alpha = 102 \quad \cdots$ ①

また，△ABF の内角の和より　$\theta + \alpha + 102 = 180 \quad \to \quad \theta + \alpha = 78 \quad \cdots$ ②

となるので，①−② より，$\theta = 24^\circ$ だから $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ の中心角は 48°. $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ の長さは

$$2\pi \times 5 \times \frac{48}{360} = \frac{4}{3}\pi.$$

♡

問 2.2 下の図で ∠x の大きさを求めよ。

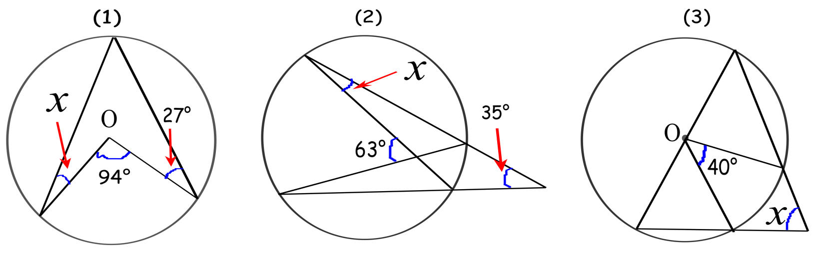


図　問2.2

§ 2.2　**円と多角形**　円と図形との関係でよく現れる形を吟味しよう。重要な結果はあとで定理の形でまとめる。

1．円と四角形　下の図 (1) のような円 O に内接する四角形 ABCD があったとする。$\angle$A$= \alpha$, $\angle$C$= \beta$ とおくと，これらの中心角は 2α, 2β で図の緑色と空色の部分である。$2\alpha + 2\beta = 360^o$ より，$\alpha + \beta = 180^o$ となる。すなわち，対角の和は 180^o である。また，$\angle$DCE$= \alpha$ なので，1 つの外角はそれととなり合う内角の対角に等しいということがわかる。

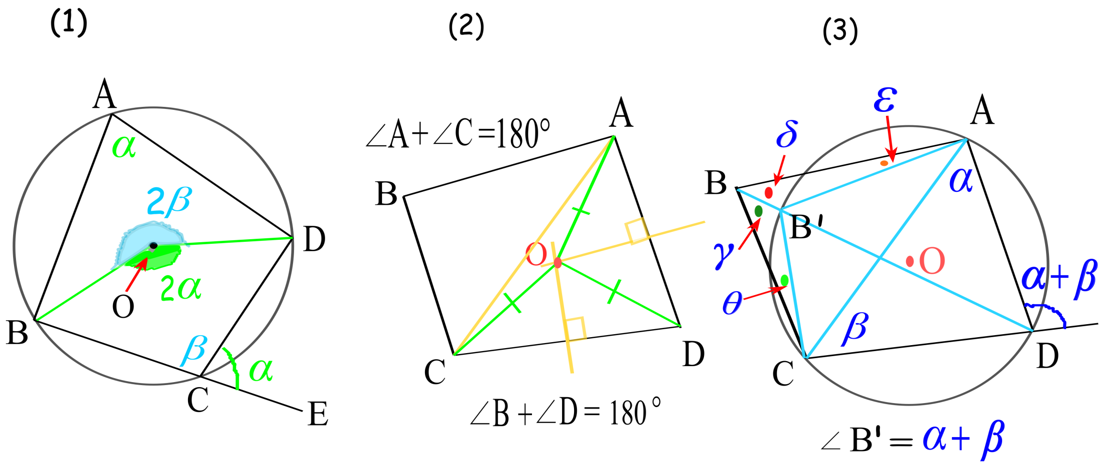


図2.5　円と四角形

逆の問題を考えよう。図 (2) で「四角形 ABCD の対角の和が 180^o のとき，4 点 A,B,C,D は 1 つの円の円周上にある」（この命題を (P) とする）は正しいだろうか？ 答えは Yes なのだが，この問題に対するやさしい解答は私もよくわからない。答えを出すには，中学校で習う以上の知識が必要のようである。高校で習う内容だが，命題 (P) と同等な命題である（P）の対偶 ;「四角形が円に内接しないならば，対角の和は 180^o ではない」を証明しよう。対偶などの命題については，この節の最後の補注を参考にせよ。

命題 (P) の対偶の証明）図 (3) で，△ACD の外接円を円 O とする。このとき，四辺形 ABCD の頂点 B は円 O の外側にあるとする。また，図に示されたように各部分の角度を定義する。線分 BD と円との交点を B' とする。$\angle$AB'D$= \beta$, $\angle$CB'D$= \alpha$ だから，△ABB' と △CBB' において

$\beta = \delta + \epsilon, \quad \alpha = \gamma + \theta. \quad \cdots$ ①　　△ACD において，　$\alpha + \beta + \angle$D$= 180^o. \quad \cdots$ ②

①を②に代入して，$\delta + \epsilon + \gamma + \theta + \angle$D$= 180^o$. $\angle$B $= \delta + \gamma$ だから，$\angle$B $+ \angle$D $= 180^o - \epsilon - \theta$.
$\therefore \quad \angle$B $+ \angle$D $< 180^o$.

点 B が円 O の内側にあるときも，同様にして，$\angle$B $+ \angle$D $> 180^o$ を示すことができるので，四角形の対角の和は 180^o ではない。□

以上より，次の定理を得る。

定理 11. (1) 円に内接する四角形の対角の和は 180^o である。また，この四角形の 1 つの外角はそれととなりあう内角の対角に等しい。

(2) 四角形の対角の和が 180^o ならば，この四角形は円に内接する。

2．円と直線　円と直線が作るよく見られる図形に対して，円周角の定理，相似形，円に内接する四角形の性質などを使った 1 つの結果（**方べきの定理**）を示す。

定理 12． 円周上に 4 点 A,B,C,D があり，点 P は円の内側あるいは外側にあるとする (図 2.6)。
(1) 図 (1) に対して，次式が成り立つ；

$$\mathrm{PA} : \mathrm{PD} = \mathrm{PB} : \mathrm{PC}\ ,\ \left(\frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PD}} = \frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PC}} \quad or \quad \mathrm{PA} \cdot \mathrm{PC} = \mathrm{PB} \cdot \mathrm{PD} \right). \quad \cdots \quad ③$$

(2) 図 (2) に対して，次式が成り立つ；

$$\mathrm{PA} : \mathrm{PC} = \mathrm{PB} : \mathrm{PD}\ ,\ \left(\frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PC}} = \frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PD}} \quad or \quad \mathrm{PA} \cdot \mathrm{PD} = \mathrm{PB} \cdot \mathrm{PC} \right). \quad \cdots \quad ④$$

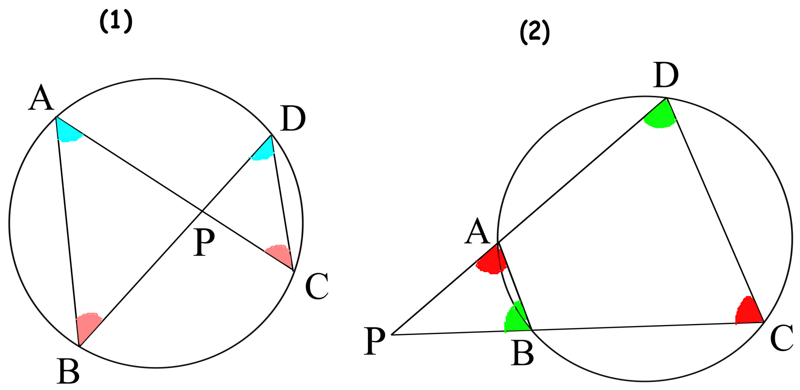


図2.6　円と直線・三角形

証明） (1) 上図では等しい角度に同じ色を付けた。△PAB と △PDC は対応する 2 つの角が等しいので相似である。したがって　PA : PD=PB : PC. カッコ内の式は，これの変形。
(2) 円に内接する四角形の外角に対する定理 10 の結果より，等しい角度には同じ色を付けた。△PAB と △PCD は対応する 2 角が等しいので相似である。したがって PA : PC=PB : PD. □

３．円と接線と弦　円の接線に関わる結果を 2 つ示す。

定理 13． (1) ［接弦定理］円の接線とその接点を通る弦の作る角は，その角の内部にある弧に対する円周角に等しい。図 (1) で，AT が A を接点とする円 O の接線のとき，∠BAT= ∠BCA.
　逆に，∠BAT= ∠BCA ならば，直線 AT は，A を接点とする △ABC の外接円 O の接線である。
(2) 円 O に外接する四角形 ABCD がある (図 (2))。このとき，AB+CD=BC+AD である。

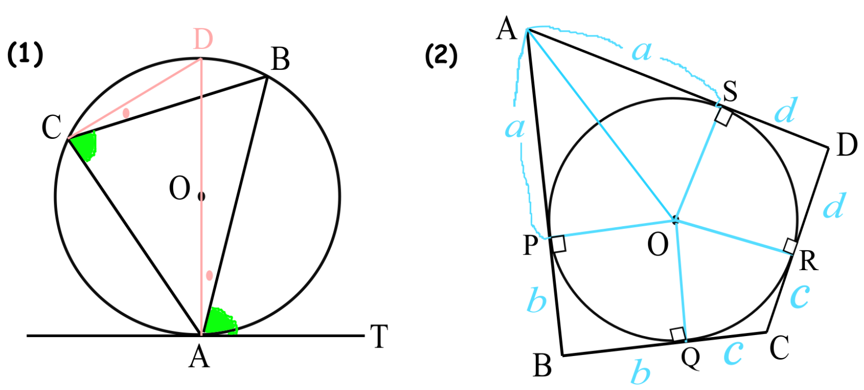


図2.7　円と接線と弦

証明）(1) 図のように，直径 AD と線分 CD を引く。AT が円 O の接線ならば，$\angle$DAT$= 90^o$.
また，$\angle$DCA$= 90^o$. $\angle$DCB と $\angle$DAB は，弧 DB の円周角なので等しい。したがって

$\angle$BCA$= 90^o -\angle$DCB$= 90^o -\angle$DAB$=\angle$BAT.

点 B が直径 AD の左側にあるときも，ほぼ同様に示すことができる（読者は，図をかいて確かめてみて）。

逆を証明しよう。図 (1) のように，円に内接する三角形 ABC と直線 AT に対して，$\angle$BAT$=\angle$BCA であるとする。直径を AD として，$\angle$DCB$=\angle$DAB だから，

$\angle$DCA$=\angle$DCB$+\angle$BCA$=\angle$DAB$+\angle$BAT$=\angle$DAT$= 90^o$.

したがって，AT は円 O の接線である。点 B が直径 AD の左側にあるときも，同様に $\angle$DAT$= 90^o$ を示すことができる。

(2) 四角形と円 O との接点を P,Q,R,S とする（図 (2) 参照）。△APO と △ASO は，直角三角形で対応する 2 辺（OP=OS, AO は共通）が等しいので，合同である。AP=AS$= a$ とおく。

同様にして，△BPO$\equiv$△BQO, △CQO$\equiv$△CRO, △DRO$\equiv$△DSO がわかる。
BP=BQ$= b$, CQ=CR$= c$, DR=DS$= d$ とおくと，AB+CD$= a+b+c+d$, BC+AD$= a+b+c+d$ である。よって，AB+CD=BC+AD. □

例題 2.3. 次の図の $\angle x$ の大きさを求めよ。点 O は円の中心，(2) の直線 BT は円 O の接線，B は接点である。

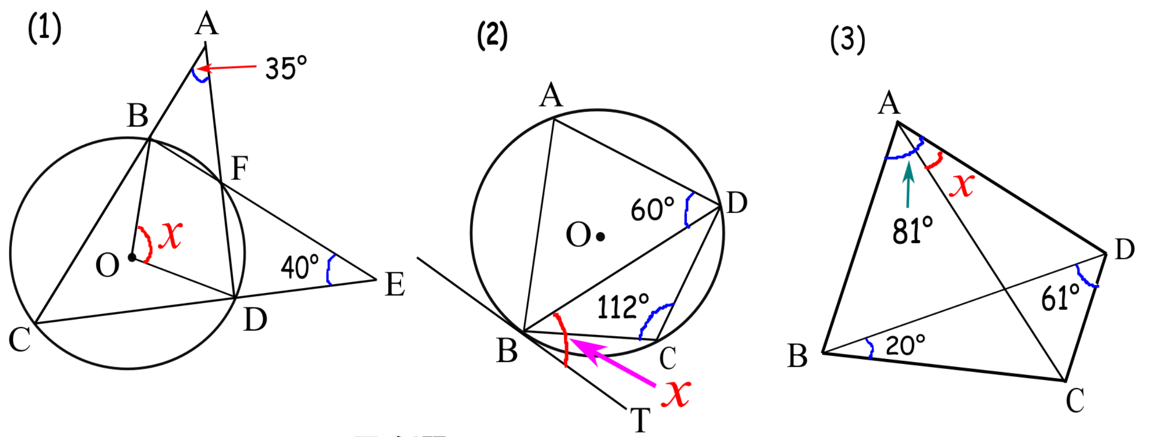


図 例題2.3

解答）(1) $\angle$BCD$=\dfrac{x}{2}$, これは四角形 BCDF の外角 EFD と等しい。三角形 FDE の内角の和は

$$\angle\text{EFD}+\angle\text{FDE}+\angle\text{E}=\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}+35\right)+40=180$$

だから，$x+75=180$, $\therefore$ $x=105$（度）.

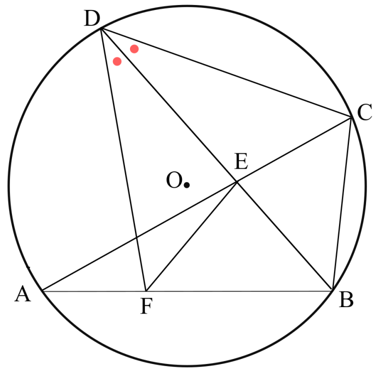
(2) $\angle$DAB$+112=180$ だから，$\angle$DAB$= 68^o$. △ABD と接線 BT について，接弦定理より
$\angle$DAB$=\angle$DBT$= 68^o$.

(3) $\angle$BCD$= 180-20-61=99$, $\angle$BCD$+\angle$DAB$= 99+81=180$（度）だから，四角形 ABCD は 1 つの円に内接する。$\angle x$ は弧 CD の円周角で $\angle$CBD に等しいから，$x=20$（度）. ♡

例題 2.4. 図のように，円 O の周上に 3 点 A,B,C を AB>BC となるようにとる。また，点 B を含まない $\overset{\frown}{AC}$ 上に 2 点 A,C とは異なる点 D をとり，線分 AC と線分 BD との交点を E とする。

さらに，線分 AB 上に点 F を ∠BDC= ∠BDF となるようにとる。次の問に答えよ。
（平成 30 年神奈川，(1) は穴埋め問題）

(1) △BCD と △FED が相似であることを証明せよ。
(2) ∠ABC= 96°，∠AEF= 30° のとき，∠BFE の大きさを求めよ。



例題2.4

解答）【(1) の証明】△BCD と △FED において，

∠BDC= ∠FDE.　··· ①

次に，$\overset{\frown}{BC}$ を考えると，　∠BDC= ∠BAC.　··· ②

①,② より，　∠FDE= ∠FAE　··· ③

2 点 A,D は直線 EF について同じ側にあって，③ が成り立つので，4 点 FEDA はある円に内接する。この円の $\overset{\frown}{DE}$ に対する円周角は等しいので，線分 AD を引くと，∠DAE= ∠DFE.

よって，　∠DAC= ∠DFE.　··· ④

また，$\overset{\frown}{CD}$ に対する円周角は等しいので，　∠DAC= ∠DBC.　··· ⑤

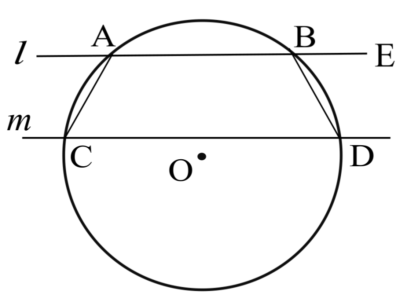
④, ⑤ より，　∠DBC= ∠DFE.　··· ⑥

①, ⑥ より，2 組の角がそれぞれ等しいから，　△BCD ∽ △FED.　□

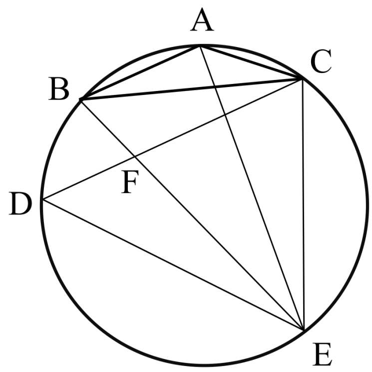
(2) ∠BDC= α とおく。∠AEF= ∠ADF= 30° だから，円 O に内接する四角形 ABCD において，対角の和（∠B+∠D）は 180°なので，　$96 + 30 + 2\alpha = 180$ より，$2\alpha = 54$,　∴　$\alpha = 27$.

∠EFB= ∠EAF+∠AEF= $27 + 30 = 57$（度）.　♡

問 2.3. 図のように，直線 l, m は平行で，それぞれ円 O と 2 点で交わる。l と円 O の交点を A,B，m と円 O との交点を C,D とする。このとき，四角形 ACDB は等脚台形（AC=BD, ∠A= ∠B or ∠C= ∠D である台形）であることを証明せよ。



問2.3



問2.4

問 2.4. ∠A が鈍角の三角形 ABC は，円 O に内接している。AB // CD となるように円周上に点 D をとる。点 E は点 A を含まない $\overset{\frown}{CD}$ 上にあり，AE=DE を満たすとする。線分 BE と線分 CD の交点を F とする。C と E は線で結ぶ。（上図右参照）次の問に答えよ。（鹿児島県）

(1) ∠ABC と大きさの等しい角を 1 つあげよ。
(2) △AEC と △DEF は合同であることを証明せよ。
(3) △ABC が ∠BAC= 150° の二等辺三角形のとき，∠ECF の大きさは何度か。

［補注： 数学の命題について］

★ 正しいか，正しくないかが定まる文や式を命題という。命題が正しいとき，その命題は真であるといい，正しくないとき，その命題は偽であるという。

（例１）　「一けたの素数は，2,3,5,7 の４つである」　（正しい命題）

（例２）　「$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$ 」　（正しくない命題）

例１で，２つの条件を　p : 一けたの素数，　q : 2,3,5,7 の４つ　としたとき，例１は

p ならば q　（これを記号で　$p \Longrightarrow q$　とかく）

と表すことができる。

一般に，命題を　$p \Longrightarrow q$　と表す。これは,「p を満たすものはすべて q を満たす」という意味である。p は仮定，q は結論とよばれる。　命題　$p \Longrightarrow q$　と　$q \Longrightarrow p$ がともに真のとき，p と q は同値であるといい，　$p \Longleftrightarrow q$　とかく。

（例 3）　$a=b \quad \Longleftrightarrow \quad (a-b)^2=0.$

★ 条件 p に対して,「p でない」も条件であり，これを p の否定といい，$\bar{p}$ で表す。条件 $\bar{p}$ の否定は p である。

（例４）　変数　x, y, a, b　は実数とする。

・「x は有理数である」　の否定は　「x は有理数でない」　すなわち　「x は無理数である」.

・「$y>0$」　の否定は　「$y>0$ でない」　すなわち　「$y \leqq 0$」.

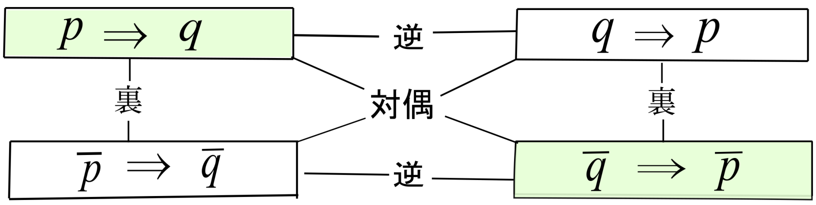
・「$a>0$ または $b>0$ 」　の否定は　「$a \leqq 0$ かつ $b \leqq 0$」.

・「a, b の少なくとも一方は有理数」　の否定は　「a, b ともに無理数」.

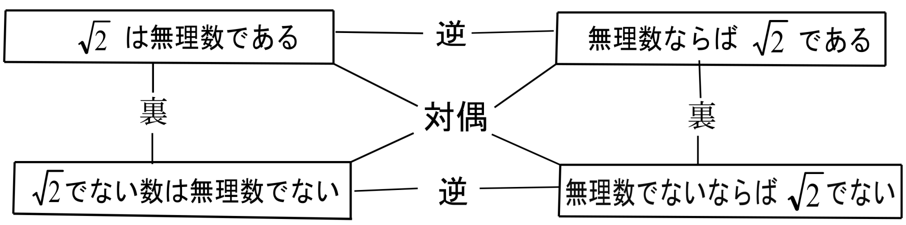
一般に，「かつ」,「または」 の否定は，次のようになる：

$\overline{p \text{ かつ } q} \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{p} \text{ または } \bar{q}, \qquad \overline{p \text{ または } q} \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{p} \text{ かつ } \bar{q}.$

★ 命題 $p \Longrightarrow q$ の逆，対偶，裏を次のように定義する。



（例）



図．命題,逆,対偶,裏の関係

（例５）　a, b は実数とする。命題「 $a=b \Longrightarrow a^2=b^2$ 」 の逆は「 $a^2=b^2 \Longrightarrow a=b$ 」.
この命題は真である。なぜならば，条件「$a=b$」の両辺を２乗すれば，$a^2=b^2$ となるからである。また，逆の命題は偽である。なぜならば，$a=-2$, $b=2$ のとき，結論が成り立たないからである。このように，偽を示す例 $a=-2$, $b=2$ を反例という。反例は１つ示せばよい。

上の図の中で示した命題「$\sqrt{2}$ は無理数である」とこれの対偶「無理数でないならば $\sqrt{2}$ でない」はともに真である。しかし，逆と裏は，ともに偽であることは明らかである（読者は，反例をすぐあげられると思います)。

きちんとした証明はしませんが，次の結果が成り立ちます。
定理 14．(1) もとの命題が真であっても，その逆が真であるとは限らない。
(2) 命題とその対偶の真偽は一致する。

上の (2) の結果より，命題の証明がむつかしいとき，その対偶を証明すればよい。

(例 6）n は整数とする。命題　「n^2 が偶数ならば，n は偶数である」　を証明せよ。

証明)　対偶　「n が奇数ならば，n^2 は奇数である」　を証明する。
奇数 n は，ある整数 k を用いて $n = 2k + 1$ と表される。このとき，

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \quad \cdots \quad ①$$

となる。$2k^2 + 2k$ は整数で，$2(2k^2 + 2k)$ は偶数。したがって式①は奇数である。命題の対偶が証明できたので，もとの命題は真である。 □

問題の答え

問 1.1. 証明）(1) $\triangle$ADE と $\triangle$ABC において，$\angle$A は共通，これと条件 AD : AB=AE : AC より，2 組の辺の比とその間の角が等しいので，$\triangle$ADE ∽ $\triangle$ABC. $\angle$ADE= $\angle$ABC (線分 DE と BC に対して同位角）だから，DE // BC.

(2) 点 C を通り，AB に平行な直線をひき，直線 DE（を延長した直線）との交点を F とする。$\triangle$ADE と $\triangle$CFE において，$\angle$ADE= $\angle$CFE, $\angle$EAD= $\angle$ECF.（ともに，AB と FC に対する錯角）2 角が等しいので　$\triangle$ADE ∽ $\triangle$CFE.
したがって，　AD : CF=AE : CE,
条件より，　AD : DB=AE : EC
だから，　DB=CF. 四角形 DBCF において，1 組の対辺が平行でその長さが等しいので，四角形 DBCF は平行四辺形。よって，DF // BC, ∴ DE // BC. □

問 1.2. 証明） $\triangle$ABC と $\triangle$AMN について，AB : AM=AC : AN=2 : 1, $\angle$A は共通だから $\triangle$ABC ∽ $\triangle$AMN. $\angle$ANM= $\angle$ACB （MN と BC の錯角）だから MN // BC.

また，BC : MN=2 : 1，したがって　MN= $\frac{1}{2}$BC. □

問 1.3. 証明） 点 A を通り，BC に平行な直線上に点 D をとり，長方形 ABCD をつくる。この長方形の 2 本の対角線は長さが等しく，その中点 M で交わる。したがって，AM=BM=CM. □

問 1.4. (1) CP=CQ なので $\angle$QPC= 45^o. $\triangle$ABP に対して外角の和の公式より，$\angle$APQ+$45^o = a^o + 90^o$. ∴ $\angle$ APQ= $a^o + 45^o$.

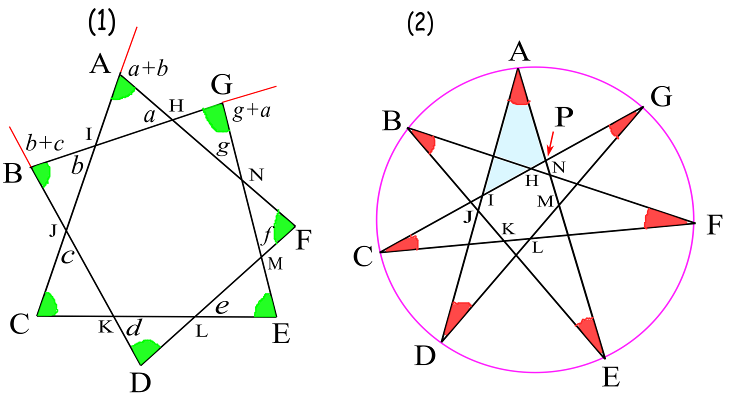
(2) (a) **証明）** $\triangle$ABP と $\triangle$EQD において，BP=DQ, AB=ED, $\angle$ABP= $\angle$ EDQ （2 辺とその間の角がそれぞれ等しい）だから $\triangle$ABP ≡ $\triangle$EQD □.

(b) $\triangle$EQD は，3 辺の比が 3 : 4 : 5 の直角三角形だから，EQ=5cm.
$\triangle$ABP と $\triangle$ERA において，$\angle$PAB= $\angle$AER, $\angle$APB= $\angle$EAR だから，$\triangle$ABP ∽ $\triangle$ERA.
ER の長さを y とすると，$8 : 5 = y : 4$ だから，$y = \frac{32}{5}$. したがって，QR= $\frac{32}{5} - 5 = \frac{7}{5}$.

よって　EQ : QR= $5 : \frac{7}{5} = 25 : 7$.

問 1.5. 正七角形の内角は $\frac{900}{7}$(度)，外角は $\frac{360}{7}$(度)。 正九角形の内角は 140^o, 外角は 40^o.

問 1.6. 下の図で説明する。(1),(2) とも，まん中の七角形を HIJKLMN とおく。



問1.6　解答図

(1) 外側の 7 つの三角形 △AHI, △BIJ, $\cdots$,△GNH の内角の和を求める。∠AHI= a, ∠BIJ= b, $\cdots$,∠GNH= g とおくと 7 つの三角形の内角の和は

$$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G+2(a+b+c+d+e+f+g)=7\times 180^{\circ}. \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

次に，14 角形 AIBJCKDLEMFNGH の外角の和を求める。∠A の外角は $a+b$, ∠B の外角は $b+c$, $\cdots$,∠G の外角は $g+a$, また，∠H の外角は $-a$, ∠I の外角は $-b$, $\cdots$,∠N の外角は $-g$ だから，この 14 角形の外角の和は

$$(a+b)+(b+c)+(c+d)+\ \cdots\ +(g+a)-(a+b+c+d+e+f+g)=360^{\circ}, \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

したがって，

$$a+b+c+d+e+f+g=360^{\circ}. \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

(iii) を (i) に代入して，

$$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G=7\times 180^{\circ}-4\times 180^{\circ}=540^{\circ}.$$

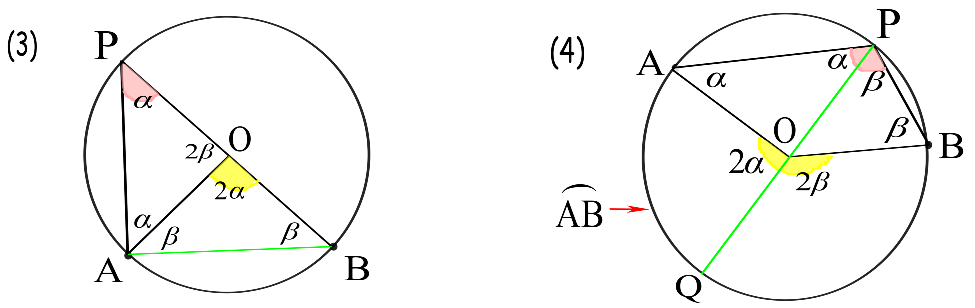
(2) △AIP と △PHN に注目する。また，三角形の外角の和の公式をうまく使う。

$$\angle D+\angle G=\angle AIP \quad \cdots \quad \text{(i)}$$
$$\angle C+\angle F=\angle PHN \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$
$$\angle B+\angle E=\angle HNP \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

また，∠PHN+∠HNP= ∠API と (i),(ii),(iii) より，△AIP の内角の和は 180° なので，

$$\angle A+\angle AIP+\angle API=\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G=180^{\circ}.$$

問 2.1. (3) のケースの証明） 角 α, β を図のように定義すると，三角形の外角の和の公式より，∠AOB= 2α, $\therefore$ ∠AOB= 2∠APB. このとき，∠POA= 2β より，$2\alpha+2\beta=180^{\circ}$ だから，$\alpha+\beta=90^{\circ}$. すなわち，半円の弧に対する円周角は 90° であることがわかる。 □



問2.1　解図

(4) のケースの証明） 角 α, β を図のように定義すると，三角形の外角の和の公式より，∠AOB= $2(\alpha+\beta)=2\angle APB$. □

問 2.2. (1) $x=20^{\circ}$　(2) 四角形の内角の和は 360° を利用。$x=14^{\circ}$.　(3) 中心角と円周角の関係，三角形の内角の和は 180° などを利用。$x=70^{\circ}$.

問 2.3. **証明**）四角形 ACDB は円に内接するので，

定理 10 より，　∠ACD= ∠DBE　$\cdots$ ①

$l \,/\!/\, m$ より，　∠DBE= ∠BDC　$\cdots$ ②

①,② より，∠ACD= ∠BDC だから，四角形 ACDB は等脚台形。 □

問 2.4. (1) ∠AEC，∠BCD，∠BED などの 1 つ。

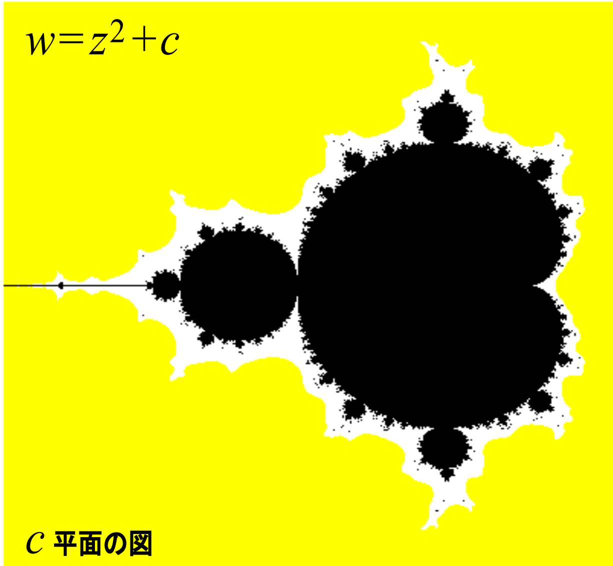
(2) **証明**）問 2.3 の結果より，AC=BD　$\therefore$　$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$　（共に点 E を含まない弧）

△AEC と △DEF について，　∠AEC= ∠DEF　$\cdots$ ①

また，　∠CAE= ∠FDE　（弧 CE の円周角）　$\cdots$ ②

①,②, AE=DE　より，1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので，△AEC ≡ △DEF.　□

(3) ∠ECF= x とおくと，∠DAE= ∠ADE= x ⋯ ①　△ABC において，∠A= 150° だから，
∠ACB= 15°. また，AC=AB=BD だから ∠BCD= 15° よって，∠ACD= 30°,
∠ACE= $x+30$（度）. ⋯ ②　四角形 ADEC において，①, ② を使うと
∠ACE+∠ADE= $(x+30)+x=180$ より，$2x=150$, ∴ $x=75$（度）.



複素 2 次関数のマンデルブロー集合（黒の部分）